



**PROCEEDINGS
ELPSA CONFERENCE III**

ISSN:2621-3850

Volume 2, nomor 1, November 2019, halaman 1-403

Proceedings ELPSA Conference merupakan kumpulan hasil penelitian kelas para guru dan kajian konten matematika, pedagogi, penelitian kualitatif, serta kualitatif para dosen pendidikan matematika. Proceeding terbit 1 kali setahun pada bulan November.

Tim editor

Pelindung dan Penasehat

Prof. Kusno, DEA., Ph.D. (Rektor UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Penanggung jawab

Masjudin, M.Pd (Ketua Prodi Pend. Matematika UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Ade Kurniawan, M.Pd (Kapala Lab. Matematika UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Baiq Rika Ayu Febrilia, S.Si., M.Si (Ketua Panitia EC3, UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Ketua Penyunting

Yuntawati, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Wakil Ketua Penyunting

Sanapiah, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Penyunting Pelaksana

Dr. Sutarto, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Dr. Ahmad Muzaki, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Dr. I Ketut Sukarma, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Syahrir, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Sabrun, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Zainal Abidin, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Eliska Juliangkary, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Sri Yuliyanti, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Pujilestari, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Ita Chairun Nissa, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Mitra Bestari

Dr. Rahmah Johar, M.Pd (Universitas Syiah Kuala, Indonesia)
Dr. Muhammad Darwis, M.Pd (Universitas Negeri Makassar, Indonesia)
Prof. Dr. H. Nurdin Arsyad, M.Pd (Universitas Negeri Makassar, Indonesia)
Dr. Nurhardiani, ST., M.Pd (UIN Mataram, Indonesia)
Indira Putri Kinasih, M.Si (UIN Mataram, Indonesia)
Destina Wahyu Winarti, S.Si., M.Pd., M.Sc (University of Canberra)
Siti Rokhmah, M.Pd., M.Sc (University of Canberra)

Alamat Redaksi:

Laboratorium & Workshop Matematika UNDIKMA Mataram, Jalan Pemuda 59A, Kota Mataram, NTB 83125. Telpon 0370 632082

Website: <https://elpsa.org/conference/2019>, email: conference@elpsa.org

Kata Pengantar

Syukur alhamdulillah kami panjatkan kepada Allah S.W.T., atas perkenan-Nya buku **Prosiding ELPSA Conference III** dengan tema **“Memperkaya Literasi Matematika dan Pedagogi Guru Melalui Refleksi, Inovasi, dan Teknologi”** ini dapat diselesaikan sesuai dengan rencana. Kegiatan **ELPSA Conference III** ini diselenggarakan oleh Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan (IKIP Mataram) pada hari Kamis, tanggal 11 Nopember 2019 di Lombok Raya Hotel. Kegiatan seminar ini diadakan untuk memfasilitasi pendidik, pemerhati pendidikan, maupun pengembang pendidikan untuk bertukar pengalaman terbaik dalam praktek pembelajaran yang mendorong terjadinya pengembangan Literasi Matematika dan dan meningkatnya kemampuan Pedagogi Guru Melalui Refleksi, Inovasi, dan Teknologi. Selain itu, ELPSA Conference III ini juga sebagai wahana tukar pengalaman antar peserta seminar yang berdampak pada kultur saling asah, asih, dan asuh sesama pendidik. Selanjutnya sebagai wadah dari makalah-makalah yang telah diseminarkan tersebut maka perlu disusun suatu prosiding. Prosiding ini merupakan kumpulan makalah seminar nasional yang telah disunting oleh para penyunting ahli dibidangnya.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada semua pihak yang telah mendukung terlaksananya seminar ini, baik langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat kami sebutkan satu-persatu.

Akhirnya, semoga prosiding ini dapat bermanfaat dan member inspirasi bagi para pembaca, khususnya para pendidik dalam meningkatkan prestasi dan profesionalitasnya.

Mataram, 11 Nopember 2019

Panitia

Daftar Isi

Halaman Sampul	I
Tim Editorial	ii
Kata Pengantar	iii
Daftar Isi	iv
ANALISIS PROSES BERPIKIR MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN PERMASALAHAN MATEMATIKA PISA	1-11
Suning Rahayu, Baiq Rika Ayu Febrilia dan Yulianti	
ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN PERMASALAHAN VOLUME BENDA PUTAR	12-24
Baiq Dewi Korida, Baiq Rika Ayu Febrilia	
PENERAPAN MODEL INKUIRI TERBIMBING BERBANTUAN GEOGEBRA UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PENALARAN SPASIAL PADA KOMPETENSI GRAFIK FUNGSI KUADRAT	25-32
Muhdar	
PENGEMBANGAN MEDIA KUBUS AJAIB MENGGUNAKAN GRAFIK 3D GEOGEBRA UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN SPASIAL SISWA	33-47
Wayan Subadre	
BEBERAPA SIFAT GRUP KOMPLEKS DAN GRUP QUARTENION	48-54
Abdul Gazir S, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana	
P-GRUP PADA GRUP DIHEDRAL	55-59
Muhammad Irfan Hidayatdan I Gede Adhitya Wisnu Wardhana	
SIFAT-SIFAT IDEAL PRIMA PADA GELANGGANG NOETHER $\mathbb{Z}[x]/\langle x^3 \rangle$	60-64
Yunita Khairunnisa dan I Gede Adhitya Wisnu Wardhana	
IDEAL PRIMA PADA DAERAH DEDEKIND $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$	65-70

Muklas Maulana, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana

PERBANDINGAN IDEAL PRIMA PADA GELANGGANG POLINOM BILANGAN BULAT DAN GELANGGANG POLINOM BILANGAN BULAT MODULO **71-76**

Daisyah Alifian Fatahillah, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana

KARAKTERISTIK GRAF PEMBAGI NOL PADA GELANGGANG BILANGAN BULAT MODULO (Z_n) **77-83**

Rina Juliana, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana

PERAMALAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN MENGGUNAKAN METODE FUZZY TIME SERIES CHENG **84-95**

Muhammad Azmi Khalqi, Mustika Hadijati dan Nurul Fitriyani

OPTIMALISASI PEMODELAN ANALISIS REGRESI LINEAR TERSEGMENT DENGAN DERET TAYLOR **96-101**

Eka Okta Nurhasanah, Nurul Fitriyani

PERAMALAN HARGA HARIAN NILAI TUKAR RUPIAH (IDR) TERHADAP DOLLAR AMERIKA (USD) DENGAN METODE JARINGAN SYARAF TIRUAN BACKPROPAGATION **102-108**

Hikmawati, Syamsul Bahri, Irwansyah

PENGEMBANGAN APLIKASI ANDROID SEBAGAI MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMP **109-119**

Apdwi Syaeruldinata

ANALISIS PENALARAN SPASIAL PESERTA DIDIK SMPN 6 KOPANG BERDASARKAN TINGKAT KEMAMPUAN MATEMATIKA **120-129**

Agus Suryadin

PENGEMBANGAN BAHAN AJAR PELATIHAN PENALARAN SPASIAL BAGI GURU MATEMATIKA SMP DI MGMP **130-143**

Adi Wijaya

STRATEGI MEGA AKBER DEKUBORI DENGAN KERANGKA KERJA ELPISA BERBANTUAN MEDIA KONSTRUKTIVIS UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PENALARAN **144-156**

Laila Wulandari

PENANAMAN KONSEP OPERASI PENJUMLAHAN DAN **157-165**

PENGURANGAN BILANGAN BULAT MENGGUNAKAN TUTUP BOTOL PADA SISWA SMP

Musnah

SOLUSI PERIODIK PADA SISTEM PREDATOR PREY DAN PERMASALAHANNYA 166-172

Marwan

PENGARUH PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE TGT (TEAM GAME TOURNAMENT) TERHADAP PRESTASI BELAJAR MATEMATIKA SISWA MATERI SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL (SPLDV) 173-180

Nila Fitriliana

MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA MATERI LUAS LINGKARAN MELALUI PENDEKATAN SAINTIFIK 181-190

Zulfiana Hauli

PERBEDAAN KEMAMPUAN SISWA MEMECAHKAN MASALAH PROGRAM LINIER DALAM BENTUK SOAL CERITA DAN GRAFIK 191-204

Ita Chairun Nissa, Puji Lestari, Dian Kumala

PENINGKATAN AKTIVITAS DAN HASIL BELAJAR SISWA MELALUI TAHAPAN APLIKASI PADA ELPSA BERORIENTASI STEM 205-217

Nur A'ini Furqan

MENEMUKAN KEMANFAATAN MATEMATIKA MELALUI KERANGKA ELPSA DALAM MENINGKATKAN HASIL BELAJAR SISWA PADA MATERI HUBUNGAN PELUANG EMPIRIK DAN TEORITIK 218-228

Nurahmawati

ANALISIS KEMAMPUAN SISWA MENYELESAIKAN SOAL PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN BILANGAN BULAT DALAM PERMAINAN KARTU MERAH PUTIH 229-232

Suci Kurnia

PENGGUNAAN MASALAH OPEN ENDED UNTUK MENGANALISIS PEMAHAMAN KONSEP SISWA PADA MATERI STATISTIKA 233-235

Emmi Suhaimi

PROFIL PENALARAN STATISTIS MAHASISWA CALON GURU 236-250

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA IKIP MATARAM
DITINJAU DARI PERBEDAAN GENDER**

Pije Sanjaya, Baiq Rika Ayu Febrilia dan Zainal Abidin

**MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS
MATEMATISSISWA MELALUI KERANGKA KERJA ELPSATAHUN
PELAJARAN 2018/2019** **251-261**

Nasirah, Ade Kurniawan, Baiq Rika Ayu Febrilia

**PROFIL KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIKA MAHASISWA
DI TINJAU DARI JENIS KELAMIN** **262-271**

Baiq Dewi Kusuma Ananda dan Dwi Utami Setyawati

**PEMAHAMAN MAHASISWA DALAM MENGOPRASIKAN TEOREMA
LIMIT** **272-281**

Ekawati Dewi dan Zulmi Insani

**PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE TPS
BERBANTUAN LKS TERHADAP PEMAHAMAN KONSEP LUAS DAN
KELILINGSEGITIGA** **282-289**

Beny Saputra, Sanapiah dan Sabrun

**PENGEMBANGAN RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN
BERKERANGKA ELPSAPADA MATERI BARISAN KELAS XI** **290-342**

Fitria Febriani, Sanapiah dan Sri Yuliyanti

**PENINGKATAN KEMAMPUAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI SISWA
KONSEP PEMUSATAN PENGOLAHAN DATA STATISTIK DENGAN
PROGRAM EXCELL DI KELAS VII SMP NEGERI 1SEKONGKANG
MELALUI PENDEKATAN STEAM** **343-358**

Endah Ekowati

**PENERAPAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA REALISTIK (PMR)
MENGUNAKAN LKS UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN
KONSEP SISWA PADA MATERI GARIS DAN SUDUT KELAS VII** **359-364**

Baiq Rosita, Sri Yuliyanti

**PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN REALISTIC MATHEMATIC
EDUCATION (RME) UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN** **365-371**

KONSEP SISWA

Iis fardyanti, Yuntawati, Pujilestari

ANALISIS KEMAMPUAN PENYELESAIAN SOAL FUNGSI DITINJAU DARI TAKSONOMI BLOOM REVISI PADA SISWA KELAS IX MTS QUR'ANIYAH BATU KUTA **372-384**

Suhaini, Masjudin, Yuntawati, Zulkifli

PENGEMBANGAN MODUL TEORI GRAPH BERBASIS PROBLEM BASED LEARNING PADA MATERI GRAPH DAN JENIS-JENIS GRAPH **385-395**

Dedy Karisma, Eliska Juliangkary

PENERAPAN PENDEKATAN PEMBELAJARAN SCIENTIFIC UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR SISWA **396-403**

Muhammad Muhajirin, Masjudin, dan Ade Kurniawan



Ideal Prima Pada Daerah Dedekind $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$

Muklas Maulana¹, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana²

^{1,2}Program Studi Matematika FMIPA Universitas Mataram
muklas.l.maulana@gmail.com
adhitya.wardhana@unram.ac.id

Abstract: Dedekind Domain and prime ideals are part of the topics discussed in the field of abstract algebra. An integral Domain is said to be the Dedekind Domain if and only if it is a Noetherian, integrally closed, and each of its prime ideals is a maximum ideal. In 2019, Maulana discussed the prime ideal's properties of Gauss integers. At present, there is no research about prime ideals of specific Dedekind Domain, because of that reason, in this article we will give some prime ideals and prime ideals' characteristics in the area of Dedekind Domain $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$. In this article, it is found the conclusion $I = \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$ and $I = \langle k, x \rangle$ are prime ideals in that Dedekind Domain.

Keywords: Dedekind Domain, prime ideal, integrally closed, maximum ideal.

Abstrak: Daerah Dedekind dan ideal prima merupakan bagian dari topik-topik yang dibahas dalam bidang aljabar abstrak. Suatu daerah integral dikatakan daerah Dedekind jika dan hanya jika merupakan gelanggang Noether, tertutup secara integral, dan setiap ideal prima tak nolnya merupakan ideal maksimal. Pada tahun 2019, Maulana, dkk. Telah membahas mengenai sifat-sifat ideal prima pada bilangan bulat Gauss. Saat ini, belum terdapat penelitian yang membahas mengenai bentuk ideal prima pada daerah Dedekind tertentu, sehingga pada artikel ini akan diberikan bentuk-bentuk ideal prima dan sifat-sifat ideal prima pada daerah Dedekind $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$. Pada artikel ini diperoleh bahwa $I = \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$ dan $I = \langle k, x \rangle$ merupakan ideal prima pada Daerah Dedekind tersebut.

Kata kunci: daerah Dedekind, ideal prima, tertutup secara integral, ideal maksimal.

PENDAHULUAN

Salah satu topik dalam aljabar abstrak adalah ideal prima. Konsep ideal prima pertama kali diperkenalkan oleh Richard Dedekind pada tahun 1871 (Kleiner, 2007). Ideal prima merupakan suatu ideal dengan syarat tertentu. Kajian lebih lanjut terkait ideal prima pada bilangan bulat Gauss telah dilakukan pada tahun 2019 (Maulana, 2019). Selain itu, kajian terkait karakteristik submodul prima lemah dan submodul hampir prima pada \mathbb{Z} -modul \mathbb{Z}_n telah dilakukan pada tahun 2014 (Wardhana dkk, 2014). Kemudian, penelitian terkait submodul prima lemah dan submodul hampir prima pada \mathbb{Z} -modul $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_9)$ telah dilakukan pada tahun 2018 (Wardhana dkk, 2018). Topik lain yang juga perlu dikaji dalam bidang aljabar adalah daerah Dedekind. Pada tahun 2011, Amir telah membahas mengenai struktur ideal prima dan gelanggang faktor dari gelanggang polinom miring atas daerah Dedekind (Amir, 2011). Namun, belum terdapat kajian mengenai bentuk-bentuk ideal prima dan karakteristik ideal prima dari suatu daerah Dedekind tertentu secara spesifik. Oleh karena itu, penulis menilai penting untuk mengkaji sifat-sifat ideal prima pada daerah Dedekind.

Untuk memudahkan penjabaran terkait ideal prima pada daerah Dedekind, terlebih dahulu akan dibahas beragam definisi yang terkait dengan topik yang akan dibahas.

Misalkan I adalah ideal pada daerah Dedekind R . Jika I tak nol, maka setiap ideal pada hasil bagi R/I merupakan ideal utama; secara ekuivalen, jika I_1 adalah ideal dari R yang memuat I maka $I_1 = I + Rb$, dengan $b \in I$.

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, akan digunakan metode Deductive Proof. Melalui metode Deductive Proof, akan dibahas mengenai beberapa kajian teori terkait Daerah Dedekind, Ideal Prima, Gelanggang Noether, dan beberapa sifat terkait gelanggang. Kemudian akan dibuktikan bahwa $I = \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$ dan $I = \langle k, x \rangle$ merupakan ideal prima pada Daerah Dedekind $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan penjabaran beberapa landasan teori terkait daerah Dedekind pada bagian pendahuluan, diperoleh fakta bahwa $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan suatu daerah Dedekind jika $n \not\equiv 1 \pmod{4}$. Bentuk daerah Dedekind tersebut dapat digeneralisasi menjadi

$$R = \left(\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2 \rangle} \right) = \langle 1, x \rangle. \text{ Selain itu, berdasarkan teorema 1 diperoleh fakta bahwa setiap ideal}$$

pada daerah Dedekind dibangun oleh dua unsur. Selanjutnya dapat dikemukakan beberapa teorema sebagai berikut:

Teorema

Misalkan $R = \left(\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2 \rangle} \right)$ merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$

merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R .

Bukti:

Misal $R = \left(\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2 \rangle} \right) = \langle 1, x \rangle$ merupakan daerah Dedekind. $I = \langle x \rangle \neq \emptyset$ dan $\langle x \rangle \subseteq R$,

maka:

- $\forall c = k_1x, d = k_2x \in \langle x \rangle$ berlaku $c - d = (k_1 - k_2)x \in \langle x \rangle$, dengan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
- $\forall a = a_0 + a_1x \in R$ dan $b = kx \in I$ berlaku $ab = a_0kx = ba \in I$, dengan $a_0, a_1, b \in \mathbb{Z}$

Sehingga $I = \langle x \rangle$ merupakan ideal pada daerah Dedekind R .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $I = \langle x \rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R . Perhatikan bahwa $\forall ab \in I$ dengan sebarang $a = a_0 + a_1x, b = b_0 + b_1x \in R$, $ab = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x = cx$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$ berakibat $a_0b_0 = 0$. Selanjutnya akan dikaji mengenai tiga kasus yang dapat terjadi:

- $a_0b_0 = 0$ dan $a_0 = 0$, maka $a = a_1x \in I$
- $a_0b_0 = 0$ dan $b_0 = 0$, maka $b = b_1x \in I$
- $a_0b_0 = 0$ serta $a_0 = b_0 = 0$, maka $a = a_1x \in I$ dan $b = b_1x \in I$.

Definisi 1 (Fraleigh, 2013)

Sebuah gelanggang $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah himpunan R dengan operasi biner $+$ dan \cdot , yaitu operasi penjumlahan dan perkalian, yang didefinisikan pada R sehingga memenuhi :

- $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah grup abelian
- Operasi perkalian bersifat asosiatif
- $\forall a, b, c \in R$, hukum distribusi kiri, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan hukum distribusi kanan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ berlaku.

Definisi 2 (Herstein, 1975)

Sebuah gelanggang R disebut gelanggang komutatif apabila $\forall r, s \in R$ berlaku $rs = sr$.

Definisi 3 (Sivaramakrishnan, 2006)

Sebuah ideal dari gelanggang R adalah subgrup aditif I dari R dengan sifat jika $r \in R$ dan $a \in I$ berakibat $ra \in I$ dan $ar \in I$.

Definisi 4 (Herstein, 1975)

Sebuah ideal $M \neq R$ pada gelanggang R disebut ideal maksimal dari R apabila ada ideal U dari R dengan sifat $M \subset U \subset R$, maka $R = U$ atau $M = U$.

Definisi 5 (Fraleigh, 2013)

Sebuah ideal $N \neq R$ pada gelanggang komutatif R adalah ideal prima jika $ab \in N$ berakibat $a \in N$ atau $b \in N$ untuk $a, b \in R$.

Definisi 6 (Fraleigh, 2013)

Daerah integral adalah gelanggang komutatif yang tidak memuat pembagi nol.

Definisi 7 (Rotman, 2005)

Sebuah ideal I dari gelanggang komutatif R disebut dibangun secara berhingga jika ada berhingga elemen $a_1, \dots, a_n \in I$ dengan $I = \{\sum_i r_i a_i : r_i \in R, \forall i\}$; dengan kata lain setiap elemen pada I adalah kombinasi linier dari a_i .

Definisi 8 (Rotman, 2005)

Sebuah gelanggang komutatif R disebut gelanggang Noether apabila setiap ideal pada R dibangun secara berhingga.

Definisi 9 (Clark, 1984)

Misalkan R subring dari R' . Sebuah $x \in R'$ disebut integral pada R jika memenuhi persamaan: $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ dengan $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$. Himpunan semua elemen R' yang merupakan integral pada R disebut *integral closure* dari R di R' dan dinotasikan dengan \bar{R} . Ketika $\bar{R} = R$, maka R disebut tertutup secara integral di R' .

Definisi 10 (Berrick, 2000)

Daerah integral \mathcal{O} disebut daerah Dedekind apabila memenuhi kondisi-kondisi berikut :

- \mathcal{O} adalah gelanggang Noether
- Setiap ideal prima tak nol dari \mathcal{O} adalah ideal maksimal
- \mathcal{O} tertutup secara integral

Teorema 1 (Amir, 2012)

Misalkan I adalah ideal dalam daerah Dedekind dan misalkan a adalah unsur tak nol dalam I , maka terdapat suatu $b \in I$ sedemikian sehingga $I = \langle a, b \rangle$.

Bukti:

Karena $\langle a \rangle \subseteq I$, maka I membagi $\langle a \rangle$ dan diperoleh $II' = \langle a \rangle$ untuk suatu ideal tak nol I' . Maka ada ideal J yang koprima dengan I' sedemikian sehingga IJ merupakan ideal utama, sehingga $IJ = \langle b \rangle$ untuk suatu $b \in I$. Selanjutnya diperoleh $\gcd(\langle a \rangle, \langle b \rangle) = \gcd(II', IJ) = I$. Karena $\gcd(I', J) = \langle 1 \rangle$, maka $I = \langle a, b \rangle$.

Proposisi 1 (Vold, 2013)

Jika n merupakan bilangan bulat bebas kuadrat (tidak dapat dibagi kuadrat sempurna) dengan $n \not\equiv 1 \pmod{4}$, maka $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ adalah daerah Dedekind.

Proposisi 2 (Foote, 2018)

Setiap daerah ideal utama merupakan daerah Dedekind.

Proposisi 3 (Foote, 2018)

Jika R merupakan daerah Dedekind, maka R adalah daerah ideal utama jika dan hanya jika R merupakan daerah faktorisasi tunggal.

Teorema 2 (Foote, 2018)

Jika R merupakan daerah Dedekind maka setiap ideal tak nol I dari R , dengan $I \neq R$ dapat ditulis sebagai hasil berhingga ideal prima: $I = P_1 P_2 \dots P_n$ (tidak perlu berbeda).

Proposisi 4 (Fraleigh, 2013)

Oleh karena itu, $I = \langle x \rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R .

Teorema

Misal $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2 \rangle \right) = \langle 1, x \rangle$ merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle k, x \rangle$ dengan

k bilangan prima anggota \mathbb{Z} merupakan ideal prima dari daerah Dedekind R .

Bukti:

Misalkan $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2 \rangle \right) = \langle 1, x \rangle$ merupakan daerah Dedekind, $I = \langle k, x \rangle$ dengan k prima.

Maka $I = \langle k, x \rangle \neq \emptyset$ dan $I \subseteq R$. Perhatikan bahwa:

- $\forall a = r_0 k + r_1 x, b = r_2 k + r_3 x \in I$, berlaku $a - b = (r_0 - r_2)k + (r_1 - r_3)x \in I$, dengan $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}$.
- $\forall a = r_0 k + r_1 x \in I$ dan $b = c + dx \in R$, berlaku $ab = r_0 kc + (r_0 kd + r_1 c)x = ba \in I$

Sehingga I merupakan ideal pada daerah Dedekind R . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $I = \langle k, x \rangle$ dengan k bilangan prima anggota \mathbb{Z} merupakan ideal prima dari daerah Dedekind R .

Perhatikan bahwa $\forall ab \in I$ dengan sebarang $a = a_0 + a_1 x, b = b_0 + b_1 x \in R$, $ab = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x = r_0 k + r_1 x$, dengan $a_0, a_1, b_0, b_1, r_0, r_1 \in \mathbb{Z}$. Sehingga diperoleh dua kasus yang mungkin terjadi:

- $k \mid a_0 b_0$, dan $k \mid a_0$ berakibat $a \in I$
- $k \mid a_0 b_0$, dan $k \mid b_0$ berakibat $b \in I$

Maka dapat disimpulkan $I = \langle k, x \rangle$ dengan k prima merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R . Jika k bukan bilangan prima, maka dapat terjadi kondisi dimana k membagi $a_0 b_0$, namun k tidak membagi a_0 dan b_0 .

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan penjabaran pada bagian hasil dan pembahasan, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- Jika $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2 \rangle \right) = \langle 1, x \rangle$ merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R .
- Jika $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2 \rangle \right) = \langle 1, x \rangle$ merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle k, x \rangle$ dengan k bilangan prima anggota \mathbb{Z} merupakan ideal prima dari daerah Dedekind R .

Kemudian, untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk mengkaji teori terkait sifat-sifat ideal prima pada daerah Dedekind yang lebih umum.

DAFTAR PUSTAKA

- Alfian, M. R., Maulana, F., Switrayni, N. W., Aini, Q., Putri, D. N., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). Prime submodule of an integer over itself. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, 27-30.
- Amir, A. K., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2010). Minimal Prime Ideals of Ore Extensions over Commutative Dedekind Domains. *arXiv preprint arXiv:1002.0278*.
- Astuti, P., & Wimmer, H. K. (2004). Stacked submodules of torsion modules over discrete valuation domains and h-independent bases. <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~wimmer/ab90/download/bullaustr3128.pdf>.
- Astuti, P., & Wimmer, H. K. (2006). Regular submodules of torsion modules over a discrete valuation domain. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 56(2), 349-357.
- Berrick, A.J., & Keating, M.E. (2000). Cambridge Studies in Advanced Mathematics 65 An Introduction to Rings and Modules with K-Theory in View. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Fraleigh, J.B. (2013). A First Course in Abstract Algebra (7th ed). United Kingdom: Pearson Education Limited.
- Herstein, I.N. (1975). Topics in Algebra (2nd ed). United States of America: John Wiley & Sons.
- Hijriati, N., Wahyuni, S., & Wijayanti, I. E. (2018, September). Injectivity and Projectivity Properties of the Category of Representation Modules of Rings. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1097, No. 1, p. 012078). IOP Publishing.
- Juliana, R., Wardhana, I. G. A. W., & Irwansyah. (2021, February). Some characteristics of cyclic prime, weakly prime and almost prime submodule of Gaussian integer modulo over integer. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2329, No. 1, p. 020004). AIP Publishing LLC.
- Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2018). Bilangan Prima dan Bilangan tak Tereduksi pada Bilangan bulat Gauss. In *Prosiding Seminar Nasional APPPI II* (pp. 383-387).
- Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2019). Ekuivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss. *Eigen Mathematics Journal*, 1-5.
- Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021, March). Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 1115, No. 1, p. 012084). IOP Publishing.
- Kleiner, I. (2007). A History of Abstract Algebra. United States of America: Birkh user Boston.
- Rotman, J.J. (2005). A First Course in Abstract Algebra (3rd ed). United States of America: Pearson Education Limited.
- Saleh, K., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On the structure of finitely generated primary modules. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 38(5), 519.
- Sivaramakrishnan, R. (2019). Certain Number-Theoretic Episodes in Algebra(2nd ed). United States of America: Chapman and Hall/CRC.
- Switrayni, N. W., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2022). On Cyclic Decomposition Of Z-Module $M_{\{m \times r\}}(Z_n)$. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, 5(1), 47-51
- Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM PRESS.
- Wardhana, I., & Astuti, P. (2015). Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima pada. *Jurnal Matematika & Sains*, 19(1), 16-20.
- Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 38(2), 121-138.

Wardhana, I. G. A. W., Nghiem, N. D. H., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021, November). A note on almost prime submodule of CSM module over principal ideal domain. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 2106, No. 1, p. 012011). IOP Publishing.

Wardhana, I. G. A. W. W., & Maulana, F. (2021). Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial. *Unisda Journal of Mathematics and Computer Science (UJMC)*, 7(2), 9-18.

Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 6(2), 261-267.

Wijayanti, I. E., & Wisbauer, R. (2009). On coprime modules and comodules. *Communications in Algebra*, 37(4), 1308-1333.

Yuwaningsih, D. A., & Wijayanti, I. E. (2015). On jointly prime radicals of (R, S) -modules. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 25-34.