Ideal Prima Pada Daerah Dedekind $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$

Muklas Maulana[1], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[2]

[1,2]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Mataram
muklas.l.maulana@gmail.com
adhitya.wardhana@unram.ac.id

Abstract: *Dedekind Domain and prime ideals are part of the topics discussed in the field of abstract algebra. An integral Domain is said to be the Dedekind Domain if and only if it is a Noetherian, integrally closed, and each of its prime ideals is a maximum ideal. In 2019, Maulanadiscussed the prime ideal's properties of Gauss integers. At present, there is no research about prime ideals of specific Dedekind Domain, because of that reason, in this article we will give some prime ideals and prime ideals' characteristics in the area of Dedekind Domain* $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$*. In this article,it is found the conclusion*$I = \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$*and* $I = \langle k, x \rangle$*are prime ideals in that Dedekind Domain.*

Keywords*: Dedekind Domain, prime ideal, integrally closed, maximum ideal.*

Abstrak: Daerah Dedekind dan ideal prima merupakan bagian dari topik-topik yang dibahas dalam bidang aljabar abstrak. Suatu daerah integral dikatakan daerah Dedekind jika dan hanya jika merupakan gelanggang Noether, tertutup secara integral, dan setiap ideal prima tak nolny amerupakan ideal maksimal. Padatahun 2019,Maulana, dkk. Telah membahas mengenai sifat- sifat ideal prima pada bilangan bulat Gauss. Saat ini, belum terdapat penelitian yang membahas mengenai bentuk ideal prima pada daerah Dedekind tertentu, sehingga pada artikel ini akan diberikan bentuk-bentuk ideal prima dan sifat-sifat ideal prima padadaerah Dedekind $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$. Pada artikel ini diperoleh bahwa $I = \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$ dan $I = \langle k, x \rangle$ merupakan ideal prima pada Daerah Dedekind tersebut.

Kata kunci:daerahDedekind, ideal prima, tertutupsecara integral, ideal maksimal.

PENDAHULUAN

Salah satu topik dalam aljabar abstrak adalah ideal prima. Konsep ideal prima pertama kali diperkenalkan oleh Richard Dedekind pada tahun 1871 (Kleiner, 2007). Ideal prima merupakan suatu ideal dengan syarat tertentu. Kajian lebih lanjut terkait ideal prima pada bilangan bulat Gauss telah dilakukan pada tahun 2019 (Maulana, 2019). Selain itu, kajian terkait karakteristik submodul prima lemah dan submodul hampir prima pada $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_n$ telah dilakukan pada tahun 2014 (Wardhana dkk, 2014). Kemudian, penelitian terkait submodul prima lemah dan submodul hampir prima pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_9)$ telah dilakukan pada tahun 2018(Wardhana dkk, 2018). Topik lain yang juga perlu dikaji dalam bidang aljabar adalah daerah Dedekind. Pada tahun 2011, Amir telah membahas mengenai struktur ideal prima dan gelanggang faktor dari gelanggang polinom miring atas daerah Dedekind (Amir, 2011). Namun, belum terdapat kajian mengenai bentuk-bentuk ideal prima dan karakteristik ideal prima dari suatu daerah Dedekind tertentu secara spesifik. Oleh karena itu, penulis menilai penting untuk mengkaji sifat-sifat ideal prima pada daerah Dedekind.

Untuk memudahkan penjabaran terkait ideal prima pada daerah Dedekind, terlebih dahulu akan dibahas beragam definisi yang terkait dengan topik yang akan dibahas.

Misalkan I adalah ideal pada daerah Dedekind$R$. Jika I taknol, maka setiap ideal pada hasil bagiR/I merupakan ideal utama; secara ekuivalen, jika I_1 adalah ideal dari R yang memuat I maka $I_1 = I + Rb$, dengan $b \in I$.

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, akan digunakan metode Deductive Proof. Melalui metode Deductive Proof, akan dibahas mengenai beberapa kajian teori terkait Daerah Dedekind, Ideal Prima, Gelanggang Noether, dan beberapa sifat terkait gelanggang. Kemudian akan dibuktikan bahwa $I = \langle x, 0\rangle = \langle x\rangle$ dan $I = \langle k, x\rangle$ merupakan ideal prima pada Daerah Dedekind $\mathbb{Z}[x] / \langle x^2\rangle$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan penjabaran beberapa landasan teori terkait daerah Dedekind pada bagian pendahuluan, diperoleh fakta bahwa $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan suatu daerah Dedekind jika $n \not\equiv 1 (mod\ 4)$. Bentuk daerah Dedekind tersebut dapat digeneralisasi menjadi $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2\rangle\right) = \langle 1, x\rangle$.Selain itu, berdasarkan teorema 1 diperoleh fakta bahwa setiap ideal pada daerah Dedekind dibangun oleh dua unsur. Selanjutnya dapat dikemukakan beberapa teorema sebagai berikut:

Teorema

Misalkan $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2\rangle\right)$ merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle x, 0\rangle = \langle x\rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind$R$.

Bukti:

Misal $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2\rangle\right) = \langle 1, x\rangle$ merupakan daerah Dedekind. $I = \langle x\rangle \neq \emptyset$ dan $\langle x\rangle \subseteq R$, maka:

- $\forall\, c = k_1 x, d = k_2 x \in \langle x\rangle$ berlaku $c - d = (k_1 - k_2)x \in \langle x\rangle$, dengan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
- $\forall\, a = a_0 + a_1 x \in R$ dan $b = kx \in I$ berlaku $ab = a_0 kx = ba \in I$, dengan $a_0, a_1, b \in \mathbb{Z}$

Sehingga $I = \langle x\rangle$ merupakan ideal pada daerah Dedekind$R$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $I = \langle x\rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind$R$.Perhatikan bahwa$\forall ab \in I$ dengan sebarang $a = a_0 + a_1 x, b = b_0 + b_1 x \in R$, $ab = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x = cx$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$ berakibat $a_0 b_0 = 0$. Selanjutnya akan dikaji mengenai tiga kasus yang dapat terjadi:

- $a_0 b_0 = 0$ dan $a_0 = 0$, maka $a = a_1 x \in I$
- $a_0 b_0 = 0$ dan $b_0 = 0$, maka $b = b_1 x \in I$
- $a_0 b_0 = 0$ serta $a_0 = b_0 = 0$, maka $a = a_1 x \in I$ dan $b = b_1 x \in I$.

Definisi 1 (Fraleigh, 2013)

Sebuah gelanggang $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah himpunan R dengan operasi biner $+$ dan $\cdot$, yaitu operasi penjumlahan dan perkalian, yang didefinisikan pada R sehingga memenuhi :

- $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah grup abelian
- Operasi perkalian bersifat asosiatif
- $\forall a, b, c \in R$, hukum distribusi kiri, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan hukum distribusi kanan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ berlaku.

Definisi 2 (Herstein, 1975)

Sebuah gelanggang R disebut gelanggang komutatif apabila $\forall r, s \in R$ berlaku $rs = sr$.

Definisi 3 (Sivaramakrishnan, 2006)

Sebuah ideal dari gelanggang R adalah subgrup aditif I dari R dengan sifat jika $r \in R$ dan $a \in I$ berakibat $ra \in I$ dan $ar \in I$.

Definisi 4 (Herstein, 1975)

Sebuah ideal $M \neq R$ pada gelanggang R disebut ideal maksimal dari R apabila ada ideal U dari R dengan sifat $M \subset U \subset R$, maka $R = U$ atau $M = U$.

Definisi 5 (Fraleigh, 2013)

Sebuah ideal $N \neq R$ pada gelanggang komutatif R adalah ideal prima jika $ab \in N$ berakibat $a \in N$ atau $b \in N$ untuk $a, b \in R$.

Definisi 6(Fraleigh, 2013)

Daerah integral adalah gelanggang komutatif yang tidak memuat pembagi nol.

Definisi 7 (Rotman, 2005)

Sebuah ideal I dari gelanggang komutatif R disebut dibangun secara berhingga jika ada berhingga elemen $a_1, \dots, a_n \in I$ dengan $I = \{\sum_i r_i\, a_i : r_i \in R, \forall i\}$; dengan kata lain setiap elemen pada I adalah kombinasi linier dari a_i.

Definisi 8 (Rotman, 2005)

Sebuah gelanggang komutatif R disebut gelanggang Noether apabila setiap ideal pada R dibangun secara berhingga.

Definisi 9 (Clark, 1984)

Oleh karena itu, $I = \langle x \rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R.

Teorema

Misal $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2 \rangle \right) = \langle 1, x \rangle$ merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle k, x \rangle$ dengan $k$bilangan prima anggota $\mathbb{Z}$merupakan ideal prima dari daerah Dedekind R.

Bukti:

Misalkan $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2 \rangle \right) = \langle 1, x \rangle$ merupakan daerah Dedekind, $I = \langle k, x \rangle$dengan k prima.

Maka $I = \langle k, x \rangle \neq \emptyset$ dan $I \subseteq R$. Perhatikan bahwa:

- $\forall a = r_0 k + r_1 x, \quad b = r_2 k + r_3 x \in I,$ berlaku $a - b = (r_0 - r_2)k + (r_2 - r_3)x \in I,$ dengan $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}.$
- $\forall a = r_0 k + r_1 x \in I$ dan $b = c + dx \in$ R, berlaku $ab = r_0 kc + (r_0 kd + r_1 c)x = ba \in I$

Sehingga I merupakan ideal pada daerah Dedekind$R$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $I = \langle k, x \rangle$ dengan k bilangan prima anggota $\mathbb{Z}$ merupakan ideal prima dari daerah Dedekind$R$. Perhatikan bahwa $\forall\, ab \in I$ dengan sebarang $a = a_0 + a_1 x, b = b_0 + b_1 x \in R$, $ab = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x = r_0 k + r_1 x$, dengan $a_0, a_1, b_0, b_1, r_0, r_1 \in \mathbb{Z}$. Sehingga diperoleh dua kasus yang mungkin terjadi:

- $k \mid a_0 b_0$, dan $k \mid a_0$ berakibat $a \in I$
- $k \mid a_0 b_0$, dan $k \mid b_0$ berakibat $b \in I$

Maka dapat disimpulkan $I = \langle k, x \rangle$ dengan k prima merupakan ideal prima pada daerah Dedekind$R$. Jika k bukan bilangan prima, maka dapat terjadi kondisi dimana k membagi $a_0 b_0$, namun k tidak membagi $a_0$dan b_0.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan penjabaran pada bagian hasil dan pembahasan, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- Jika $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2 \rangle \right) = \langle 1, x \rangle$ merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R.
- Jika $R = \left(\mathbb{Z}[x] / \langle x^2 \rangle \right) = \langle 1, x \rangle$merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle k, x \rangle$ dengan k bilangan prima anggota $\mathbb{Z}$ merupakan ideal prima dari daerah Dedekind R.

Kemudian, untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk mengkaji teori terkait sifat-sifat ideal prima pada daerah Dedekind yang lebih umum.

Alfian, M. R., Maulana, F., Switrayni, N. W., Aini, Q., Putri, D. N., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). Prime submodul of an integer over itself. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, 27-30.

Amir, A. K., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2010). Minimal Prime Ideals of Ore Extensions over Commutative Dedekind Domains. *arXiv preprint arXiv:1002.0278*.

Astuti, P., & Wimmer, H. K. (2004). Stacked submodules of torsion modules over discrete valuation domains and h-independent bases. *http:/www. mathematik. uni-wuerzburg. de/~wimmer/ab90/download/bullaustr3128. pdf*.

Astuti, P., & Wimmer, H. K. (2006). Regular submodules of torsion modules over a discrete valuation domain. *Czechoslovak Mathematical Journal*, *56*(2), 349-357.

Berrick, A.J., & Keating, M.E. (2000). Cambridge Studies in Advanced Mathematics 65 An Introduction to Rings and Modules with K-Theory in View. United Kingdom: Cambridge University Press.

Fraleigh, J.B. (2013). A First Course in Abstract Algebra (7th ed). United Kingdom: Pearson Education Limited.

Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematics Journal*, 73-76.

Herstein, I.N. (1975). Topics in Algebra (2nd ed). United States of America: John Wiley & Sons.

Hijriati, N., Wahyuni, S., & Wijayanti, I. E. (2018, September). Injectivity and Projectivity Properties of the Category of Representation Modules of Rings. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1097, No. 1, p. 012078). IOP Publishing.

Juliana, R., Wardhana, I. G. A. W., & Irwansyah. (2021, February). Some characteristics of cyclic prime, weakly prime and almost prime submodule of Gaussian integer modulo over integer. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2329, No. 1, p. 020004). AIP Publishing LLC.

Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2018). Bilangan Prima dan Bilangan tak Tereduksi pada Bilangan bulat Gauss. In *Prosiding Seminar Nasional APPPI II* (pp. 383-387).

Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2019). Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss. *Eigen Mathematics Journal*, 1-5.

Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021, March). Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 1115, No. 1, p. 012084). IOP Publishing.

Kleiner, I. (2007). A History of Abstract Algebra. United States of America: Birkh user Boston.

Rotman, J.J. (2005). A First Course in Abstract Algebra (3rd ed). United States of America: Pearson Education Limited.

Saleh, K., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On the structure of finitely generated primary modules. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, *38*(5), 519.

Sivaramakrishnan, R. (2019). Certain Number-Theoretic Episodes in Algebra(2nd ed). United States of America: Chapman and Hall/CRC.

Switrayni, N. W., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2022). On Cyclic Decomposition Of Z-Module M_ {m× r}(Z_n), *Journal of Fundamental Mathematics and Applications, 5(1)*, 47-51

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM PRESS.

Wardhana, I., & Astuti, P. (2015). Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima pada. *Jurnal Matematika & Sains*, *19*(1), 16-20.

Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, *38*(2), 121-138.

Wardhana, I. G. A. W., Nghiem, N. D. H., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021, November). A note on almost prime submodule of CSM module over principal ideal domain. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 2106, No. 1, p. 012011). IOP Publishing.

Wardhana, I. G. A. W. W., & Maulana, F. (2021). Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial. *Unisda Journal of Mathematics and Computer Science (UJMC)*, *7*(2), 9-18.

Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, *6*(2), 261-267.

Wijayanti, I. E., & Wisbauer, R. (2009). On coprime modules and comodules. *Communications in Algebra*, *37*(4), 1308-1333.

Yuwaningsih, D. A., & Wijayanti, I. E. (2015). On jointly prime radicals of (R, S)-modules. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 25-34.