Perbandingan Ideal Prima Pada Gelanggang Polinomial Bilangan Bulat ($\mathbb{Z}[x]$) Dan Gelanggang Polinomial Bilangan Bulat Modulo $n(\mathbb{Z}_n[x])$

Daisyah Alifian Fatahillah[1], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[2]

[1,2]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Mataram
daisfatahillah2@gmail.com
adhitya.wardhana@unram.ac.id

Abstract: *A ring R can be formed from existing ring $\mathbb{R}$, and we called it polynomial ring, we denote it by $\mathbb{R}[x]$. If we choose $R = \mathbb{Z}_n$ then we have integer modulo polynomial $\mathbb{Z}_n[x]$, Ring polynomial over R is $R[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \forall a_i \in R\}$.. In 2019 Maulana et all gives some properties of prime ideal in Gaussian integer, in article. We will gives the comparison of prime ideal in integer polynomial and prime ideal in integer modulo polynomial, where prime ideal in integer polynomial not necessary prime in integer modulo polynomial.*

Keywords: *ring* polynomial, modulo n integers, prime ideal

Abstrak: Suatu gelanggang $\boldsymbol{R}$dapat dibentuk gelanggang baru yaitu gelanggang polinomial atau yang sering disebut dengan gelanggang $R[x]$. Untuk $R[x] = \mathbb{Z}_n[x]$ merupakan suatu gelanggang polinom yang sering disebut sebagai gelanggang polinom bilangan bulat modulo n. Gelangang polinom atas R adalah himpunan semua polinom dengan konstantan R dimana $R[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \forall a_i \in R\}$. Pada tahun 2019 Maulana dkk telah membahas mengenai sifat- sifat ideal prima pada bilangan bulat Gauss. Pada artikel ini akan diberikan perbandingan sifat-sifat ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat modulo n dengan gelanggang polinom bilangan bulat,,dimana jika I ideal prima pada bilangan bulat belum tentu ideal prima pada gelanggang bilangan bulat modulo n.

Kata kunci: gelanggang polinom, bilangan bulat modulo n, ideal prima

PENDAHULUAN

Ideal prima merupakan abstraksi bilangan prima yang diperkenalkan oleh Dedekind pada tahun 1871. Sifat-sifat ideal prima telah dibahas oleh Maulana dkk (2019). Sifat-sifat ideal prima pada gelanggang polinom perna diberikan oleh Amir (2011). Artikel kali ini penulis lebih memfokuskan pada perbandingan ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat $\mathbb{Z}[x]$ dengan ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat modulo $n\mathbb{Z}_n[x]$.

Sebelum diuraikan sifat-sifat mengenai ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat modulo $n$dan gelanggang polinom bilangan bulat, akan dikenalkan beberapa definisi dan sifat-sifat dasar.

Definisi 1.1 (Kenneth,1983)

Bilangan prima merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 yang hanya dapat di bagi oleh 1 dan dirinya

Definisi 1.2 (Rotman,2005)

Diberikan gelanggang R, jika $u \in R$ memenuhi $ux = xu = x,\ \forall x \in R$ maka u disebut unit.

Definisi 1.3 (Rotman,2005)

Sistem matematika $(R, +, \times)$dikatakan suatu gelanggang komutatif jika memenuhi:

a. $a + b = b + a\ , \forall a, b \in R$
b. $a + (b + c) = (a + b) + c$
c. $\exists 0 \in R$ dengan $0 + a = a, \forall a \in R$
d. $\forall a \in R, \exists a' \in R$ dengan $a + a' = 0$
e. $ab = ba\ , \forall a, b \in R$
f. $a(bc) = (ab)c, \forall a, b \in R$
g. $\exists u \in R$, dimana $ua = au = a, \forall a \in R$
h. $a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in R$

Jika diberikan$I$ subhimpunan dari$R$ yang tak hampa, I dikatakan ideal jika memenuhi definisi dibawah ini.

Definisi 1. (Hidayat,2017)

Misalkan R suatu gelanggang, $I \subseteq R$, dimana I tidak hampa. Subhimpunan I dikatakan ideal jika memenuhi

a. $a - b \in I, \forall a, b \in I$
b. $ar \in I$ dan $ra \in I$, $\forall a \in I$ dan $\forall r \in R$

Salah satu ideal yang penting adalah ideal prima yang merupakan abstraksi dari bilangan prima. Definisi ideal prima akan diberikan sebagai berikut.

Definisi 1.5 (Fraleigh,2013)

Misalkan R suatu gelanggang komutatif dan I suatu ideal di R. Ideal I disebut ideal prima jika $I \neq R$ dan $\forall a, b \in R, ab \in I$ berimplikasi bahwa $a \in I$ atau $b \in I$.

Apabila diberikan suatu gelanggang komutatif R dapat dibuat gelanggang baru yang dinamakan gelanggang polinomial. Definisi gelanggang polinomial akan diberikan sebagai berikut.

Definisi 1.6 (Hidayat,2017)

Misalkan $(R, +, \times)$ suatu gelanggang komutatif, suatu polinom dengan variabel$x$ atas R adalah suatu pernyataan dalam bentuk :

$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ dengan $a_n \neq 0$

Dimana $a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \in R$ dan n bilangan bulat non negatif. Selanjutnya $a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \in R$ disebut sebagai koefesien dari polinom.Himpunan semua polinom dengan operasi penjumlahan polinom dan perkalian polinom yang membentuk suatu gelanggang baru yang disebut gelangggang polinom.

Definisi 1.7 (Rotman,2005)

Derajat merupakan pangkat tertinggi dari suatu polynomial.

Teorema 1.1 (Rotman,2005)

Apabila $\alpha, \beta \in R[x]$ maka berlaku $der(\alpha\beta) = der(\alpha) + der(\beta)$.

METODE

Metode yang digunakan dalam artikel ini yaitu metode *Deductive Proof*. Sifat-sifat ideal prima yang telah diketahui akan dibuat konjektur pada gelanggang yang lebih kompleks, dari konjektur tersebut digunakan *rigorus proof* untuk menemukan sifat baru.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan diberikan perbandingan ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat dan gelanggang polinom bilangan bulat modulo n yang disimbolkan dengan$\mathbb{Z}[x]$ dan$\mathbb{Z}_n[x]$. Yakni ideal prima terhadap galanggang polinom bilangan bulat akan tetapi belum tentu ideal prima terhadap gelanggang polinom bilangan bulat modulo n, jadi untuk I ideal di $\mathbb{Z}[x]$dan $\mathbb{Z}_n[x]$ dimana I ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat $\mathbb{Z}[x]$ tetapi$I$ belum tentu ideal prima pada $\mathbb{Z}_n[x]$.

Sifat 2.1

Ideal $\langle x \rangle$ adalah ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$tetapi belum tentu ideal prima di$\mathbb{Z}_n[x]$.

Bukti

$\langle x \rangle = \{kx| \ k \in \mathbb{Z}\}$

Ambil sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[x]$, sedemikian sehingga, jika , $\alpha. \beta \in \mathbb{Z}[x]$

Akan ditunjukan bahwa $\alpha \in \langle x \rangle$ atau $\beta \epsilon \langle x \rangle$.

Untuk $\alpha\beta = 0$, jelas $\alpha \in \langle x \rangle$ atau $\beta \in \langle x \rangle$

Oleh karena itu asumsikan $\alpha, \beta \neq 0,$

Menurut sifat perkalian polinom

$der(\alpha\beta) = der(\alpha) + der(\beta)$ dengan $der(\alpha\beta) = 1$

Kasus 1

- Jika $der(\alpha) = 1$ dan $der(\beta) = 0$ maka

  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x$

  $\beta = \beta_0, \beta_0 \neq 0$ sehingga

  $\alpha\beta = (\alpha_0 + \alpha_1 x)\beta_0$

  $= \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_0 x = kx$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$, akibatnya

  $\alpha_0\beta_0 = 0$ sehingga $\alpha_0 = 0$ atau $\beta_0 = 0$

  Sehingga $\alpha \in \langle x \rangle$ atau $\beta \epsilon \langle x \rangle$

Kasus 2

- Jika $der(\alpha) = 0$ dan $der(\beta) = 1$ maka
  $\alpha = \alpha_0, \alpha_0 \neq 0$
  $\beta = \beta_0 + \beta_1 x$ sehingga

  $\alpha\beta = \alpha_0(\beta_0 + \beta_1 x)$
  $= \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_1 x = kx$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$, akibatnya
  $\alpha_0\beta_0 = 0$ sehingga $\alpha_0 = 0$ atau $\beta_0 = 0$
  Sehingga $\alpha \in \langle x \rangle$ atau $\beta \epsilon \langle x \rangle$

$\therefore \langle x \rangle$ ideal prima pada $\mathbb{Z}[x]$

Akan dibuktikan $\langle x \rangle$ bukan ideal prima pada $\mathbb{Z}_n[x]$
Misalkan diberikan gelanggang $\mathbb{Z}_8[x]$, akan diberikan contoh penyangkal bahwa$\langle x \rangle$ bukan ideal prima pada $\mathbb{Z}_8[x]$.

Pilih $\alpha = 2$ dan $\beta = 4$, akibatnya $\alpha.\beta = 0 \in \langle x \rangle$tetapi $\alpha \notin \langle x \rangle$ atau $\beta \notin \langle x \rangle$.

Sifat 2.2
Ideal$\langle x + 1 \rangle$adalah ideal prima di$\mathbb{Z}[x]$ tetapi belum tentu ideal prima di$\mathbb{Z}_n[x]$

Bukti
$\langle x + 1 \rangle = \{k(x + 1) | k \in \mathbb{Z}\}$
Ambil sebarang $f, g \in \mathbb{Z}[x]$,sedemikian sehingga, jika $f.g \in \mathbb{Z}[x]$, akan ditunjukan bahwa $f \in \langle x + 1 \rangle$ atau $g \in \langle x + 1 \rangle$.
Untuk $f.g = 0$, jelas $f \in \langle x + 1 \rangle$ atau $g \in \langle x + 1 \rangle$
Oleh karena itu asumsikan $f, g \neq 0$
Menurut sifat perkalian polinom
$der(fg) = der(f) + der(g)$, dengan $der(f, g) = 1$

Kasus 1

- Jika $der(f) = 1$ dan $der(g) = 0$ maka
  $f = f_0 + f_1 x$
  $g = g_0$
  $fg = (f_0 + f_1 x).g_0$
  $= f_0 g_0 + f_1 g_0 x = kx + k$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$, akibatnya

  $f_0 g_0 = k$ dan $f_1 g_0 = k$ sehinnga $f_0 g_0 = f_1 g_0$, menggunakan hukum pembatalan,maka $f_0 = f_1$, sehingga
  $f = f_1 + f_1 x = f_1(1 + x) \in \langle x + 1 \rangle$

Kasus 2

- Jika $der(f) = 0$ dan $der(g) = 1$ maka
  $f = f_0$
  $g = g_0 + g_1 cx$
  $fg = f_0 \cdot (g_0 + g_1 x)$
  $= f_0 g_0 + f_0 g_1 x = kx + k$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$, akibatnya

$f_0 g_0 = k$ dan $f_0 g_1 = k$ sehinnga $f_0 g_0 = f_0 g_1$, menggunakan hukum pembatalan,maka $f_0 = f_1$, sehingga

$f = g_1 + g_1 x = g_1(1+x) \in \langle x+1 \rangle$

$\therefore \langle x+1 \rangle$ ideal prima pada $\mathbb{Z}[x]$

Akan dibuktikan bahwa $\langle x+1 \rangle$ belum tentu ideal prima pada $\mathbb{Z}_n[x]$

Misalkan diberikan galanggang $\mathbb{Z}_{20}[x]$, akan diberikan contoh penyangkal bahwa $\langle x+1 \rangle$ bukan ideal prima pada $\mathbb{Z}_{20}[x]$

Pilih $f = 10$ dan $g = 2$, akibatnya $f.g = 0 \in \langle x+1 \rangle$, tetapi $10 \notin \langle x+1 \rangle$ dan $2 \notin \langle x+1 \rangle$

SIMPULAN DAN SARAN

Pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bilangan bulat atau $\mathbb{Z}[x]$ belum tentu ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat modulo $n$atau $\mathbb{Z}_n[x]$, sehingga dari pembahasan yang telah dipaparkan bahwa sifat-sifat ideal prima pada gelanggang polinom adalah

1. $\langle x \rangle$ ideal prima pada $\mathbb{Z}[x]$ tetapi belum tentu ideal prima pada $\mathbb{Z}_n[x]$
2. $\langle x+1 \rangle$ ideal prima pada pada $\mathbb{Z}[x]$ tetapi belum tentu ideal prima pada $\mathbb{Z}_n[x]$

Saran dalam penelitian ini agar sifat-sifat yang telah dibahas dapat diperumum kembali dan mencari ideal-ideal lainnya seperti ideal utama maupun ideal maksimal pada $\mathbb{Z}[x]$ atau pun pada $\mathbb{Z}_n[x]$.

DAFTAR PUSTAKA

Amir, A.K. (2012). *Struktur Ideal Prima dan Gelanggang Faktor dari Gelanggang Polinom Miring atas Daerah Dedekind*.

Amir, K Amir. (2010). Ideal Maksimaldan Ideal Primadari Gelanggang Polinom Miring Atas Daerah Bilangan Bulat Gauss,Makara Sains, Vol. 14, No. 2, 184-187.

Fraleigh, J.B. (2013). *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed). United Kingdom: Pearson Education Limited.

Hidayat, Noor. (2017). *Cara Mudah Memahami Sturuktur Aljabar*, Penerbit Universitas Brawijaya Press, Malang.

Maulana, F.,Wardhana, I. G. A.W., Switrayni, N. W. (2019). *Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Galanggang Bilangan Bulat Gauss, Eigen Mathematics Journal, 1(1),* 1.

Rosen, K. (1983). *Elementary Number Theory And Its Applications, ADSION-WESLEY Publishing Company.*

Rotman, Joseph J. (2015). *A First Course In Abstract Algebra With Applications, Third Edition*. University of Illinois

Alfian, M. R., Maulana, F., Switrayni, N. W., Aini, Q., Putri, D. N., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). Prime submodul of an integer over itself. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, 27-30.

Amir, A. K., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2010). Minimal Prime Ideals of Ore Extensions over Commutative Dedekind Domains. *arXiv preprint arXiv:1002.0278*.

Astuti, P., & Wimmer, H. K. (2004). Stacked submodules of torsion modules over discrete valuation domains and h-independent bases. *http:/www. mathematik. uni-wuerzburg. de/~wimmer/ab90/download/bullaustr3128. pdf*.

Astuti, P., & Wimmer, H. K. (2006). Regular submodules of torsion modules over a discrete valuation domain. *Czechoslovak Mathematical Journal*, *56*(2), 349-357.

Berrick, A.J., & Keating, M.E. (2000). Cambridge Studies in Advanced Mathematics 65 An Introduction to Rings and Modules with K-Theory in View. United Kingdom: Cambridge University Press.

Fraleigh, J.B. (2013). A First Course in Abstract Algebra (7th ed). United Kingdom: Pearson Education Limited.

Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematics Journal*, 73-76.

Herstein, I.N. (1975). Topics in Algebra (2nd ed). United States of America: John Wiley & Sons.

Hijriati, N., Wahyuni, S., & Wijayanti, I. E. (2018, September). Injectivity and Projectivity Properties of the Category of Representation Modules of Rings. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1097, No. 1, p. 012078). IOP Publishing.

Juliana, R., Wardhana, I. G. A. W., & Irwansyah. (2021, February). Some characteristics of cyclic prime, weakly prime and almost prime submodule of Gaussian integer modulo over integer. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2329, No. 1, p. 020004). AIP Publishing LLC.

Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2018). Bilangan Prima dan Bilangan tak Tereduksi pada Bilangan bulat Gauss. In *Prosiding Seminar Nasional APPPI II* (pp. 383-387).

Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2019). Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss. *Eigen Mathematics Journal*, 1-5.

Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021, March). Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 1115, No. 1, p. 012084). IOP Publishing.

Kleiner, I. (2007). A History of Abstract Algebra. United States of America: Birkh user Boston.

Rotman, J.J. (2005). A First Course in Abstract Algebra (3rd ed). United States of America: Pearson Education Limited.

Saleh, K., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On the structure of finitely generated primary modules. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, *38*(5), 519.

Sivaramakrishnan, R. (2019). Certain Number-Theoretic Episodes in Algebra(2nd ed). United States of America: Chapman and Hall/CRC.

Switrayni, N. W., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2022). On Cyclic Decomposition Of Z-Module M_ {m× r}(Z_n), *Journal of Fundamental Mathematics and Applications, 5(1)*, 47-51

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM PRESS.

Wardhana, I., & Astuti, P. (2015). Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima pada. *Jurnal Matematika & Sains*, *19*(1), 16-20.

Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, *38*(2), 121-138.

Wardhana, I. G. A. W., Nghiem, N. D. H., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021, November). A note on almost prime submodule of CSM module over principal ideal domain. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 2106, No. 1, p. 012011). IOP Publishing.

Wardhana, I. G. A. W. W., & Maulana, F. (2021). Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial. *Unisda Journal of Mathematics and Computer Science (UJMC)*, *7*(2), 9-18.

Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, *6*(2), 261-267.

Wijayanti, I. E., & Wisbauer, R. (2009). On coprime modules and comodules. *Communications in Algebra*, *37*(4), 1308-1333.

Yuwaningsih, D. A., & Wijayanti, I. E. (2015). On jointly prime radicals of (R, S)-modules. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 25-34.