C28. Dr. Amrullah, M.Si

by Amrullah Amrullah

Submission date: 01-Mar-2023 09:10PM (UTC-0600)
Submission ID: 2026684155
File name: C28. Dr. Amrullah, M.Si.pdf (460.03K)
Word count: 2627
Character count: 17403

Griya Journal of Mathematics Education and Application
Volume 1 Nomor 3, September 2021
e-ISSN 2776-124X| | p-ISSN 2776-1258
https://mathjournal.unram.ac.id/index.php/Griya/index

Pembentukan grup matriks singular 2×2

Ery Nurjayanto[1]*, Amrullah[2], Arjudin[3], Sudi Prayitno[4]

[1] *Mahasiswa Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Mataram,* ***Mataram***
[2,3,4] *Dosen Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Mataram,* ***Mataram***

erynurjayanto26@gmail.com

Diterima: 20-09-2021; Direvisi: 26-09-2021; Dipublikasi: 30-09-2021

Abstract
The study aims to determine the set of the singular matrix 2×2 that forms the group and describes its properties. The type of research was used exploratory research. Using diagonalization of the singular matrix $\bar{S} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, where $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ as a generator matrix, pseudo identity and pseudo inverse methods, we obtained a group singular matrix 2×2 with standard multiplication operations on the matrix, with condition namely: (1) closed, (2) associative, (3) there was an element of identity $\overline{I_S}$, (4) inverse, there was $(\bar{A})^{-1}$ so $\bar{A} \times (\bar{A})^{-1} = (\bar{A})^{-1} \times \bar{A} = \overline{I_S}$. The group was abelian group (commutative group). In addition, in the group $\overline{\mathcal{G}_S}$ satisfied that if $\forall \bar{A}, \bar{X}, \bar{Y} \in \overline{\mathcal{G}_S}$ was such that $\bar{A} \times \bar{X} = \bar{A} \times \bar{Y}$ then $\bar{X} = \bar{Y}$ and $\bar{X} \times \bar{A} = \bar{Y} \times \bar{A}$ then $\bar{X} = \bar{Y}$. This show that the group can be applied the cancellation properties like the case in nonsingular matrix group. This research provides further research opportunities on the formation of singular matrix groups 3×3 or higher order.

Keywords: sigular matrix; diagonalization; group; generator matrix

Abstrak
Penelitian ini bertujuan untuk menentukan himpunan matriks singular 2×2 yang membentuk grup dan mendeskripsikan sifat-sifatnya. Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian eksploratif dengan menggunakan diagonalisasi pada matriks singular $\bar{S} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dimana $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sebagai matriks generator dan penggunaan metode pseudo identitas dan pseudo invers diperoleh grup matriks singular 2×2 ($\overline{\mathcal{G}_S}$) dengan operasi perkalian baku pada matriks, yaitu memenuhi syarat: (1) tertutup, (2) asosiatif, (3) terdapat elemen identitas terdapat $(\bar{A})^{-1}$ dengan sehingga $\bar{A} \times (\bar{A})^{-1} = (\bar{A})^{-1} \times \bar{A} = \overline{I_S}$. Grup yang terbentuk merupakan grup abelian (grup komutatif). Selain itu, pada grup $\overline{\mathcal{G}_S}$ berlaku jika $\forall \bar{A}, \bar{X}, \bar{Y} \in \overline{\mathcal{G}_S}$ sedemikian sehingga $\bar{A} \times \bar{X} = \bar{A} \times \bar{Y}$ maka $\bar{X} = \bar{Y}$ dan $\bar{X} \times \bar{A} = \bar{Y} \times \bar{A}$ maka $\bar{X} = \bar{Y}$. Hal ini menunjukkan bahwa pada grup ini berlaku sifat penghapusan seperti halnya pada grup matriks nonsingular. Penelitian ini memberikan peluang penelitian lanjutan pada pembentukan grup matriks singular 3×3 atau ordo yang lebih tinggi.

Kata Kunci: matriks singular; diagonalisasi; grup; matriks generator

1. PENDAHULUAN

Matematika sangat penting dipelajari dalam dunia pendidikan. Matematika merupakan mata pelajaran yang diajarkan mulai dari Sekolah Dasar (SD) sampai dengan Perguruan Tinggi (PT). Banyak sekali pengetahuan yang dari belajar matematika. Mulai dari hal yang mendasar seperti berhitung sampai ketingkat yang lebih tinggi dalam menyelesaiakan suatu masalah dapat dipelajari dalam pembelajaran matematika. Matematika merupakan dasar ilmu yang mempengaruhi perkembangan teknologi. Menurut Ag dan Fathani (Faizah, 2019), untuk dapat berkecimpung dalam dunia sains, teknologi, maupun ilmu lainnya, langkah awal yang harus di tempuh adalah menguasai ilmu dasarnya yaitu matematika.

Tanpa disadari banyak sekali obyek dalam matematika yang dipelajari itu ternyata adalah suatu grup. Contohnya pada sistem bilangan, seperti himpunan bilangan bulat terhadap operasi biner penjumlahan, bilangan real dengan operasi biner perkalian (Sripatmi et al., 2018). Contoh lainnya yang sering ditemui yaitu grup matriks. Diketahui bahwa matriks nonsingular yang determinannya tak nol dapat ditentukan inversnya dengan cara yang umumnya semua mahasiswa mengetahui hal tersebut. Hal ini diajarkan dari jenjang Sekolah Menengah Atas (SMA), bahkan sampai ke Perguruan Tinggi di semua bidang ilmu, matriks diajarkan dalam kuliah Matematika Dasar. Berangkat dari hal tersebut tentu dikalangan semua pelajar dan mahasiswa mengetahui bahwa invers dan identitas dari suatu matriks nonsingular bisa didapatkan, sehingga semua matriks nonsingular dapat membentuk grup dengan operasi perkalian.

Berbeda halnya dengan matriks singular yang perhitungan determinannya sama dengan nol, sebagian orang akan berpikir bahwa matriks singular tidak dapat membentuk suatu grup dikarenakan determinannya sama dengan nol yang berakibat tidak terdefinisinya invers dari matriks singular tersebut sehingga identitas matriks tidak berlaku untuk matrik singular (Dewi et al., 2011). Apakah benar dengan detetrminan sama dengan nol dan identitas matriks tidak berlaku mengakibatkan himpunan dari matriks singular tidak dapat membentuk grup.

Suatu himpunan dikatakan dapat membentuk grup apabila memenuhi syarat-syarat pembentukan grup. Ada empat syarat yang harus dipenuhi oleh suatu himpunan agar dapat membentuk grup, diantaranya bersifat tertutup terhadap operasi biner, asosiatif, memiliki identitas dan setiap anggota himpunan memiliki invers. Suatu himpunan sembarang tidak dapat membentuk grup apabila tidak memenuhi syarat-syarat tersebut, karena menurut definisi grup, syarat-syarat tersebut harus terpenuhi.

Selama ini matriks singular diketahui tidak memiliki invers sehingga identitas matriks tidak berlaku untuknya. Dalam banyak referensi bidang matematika tidak banyak dibahasan mengenai pokok bahasan matriks singular dan sangat terbatas dengan pengenalan yang sangat singkat. Hal tersebut dikarenakan invers dari matriks singular tidak terdefinisi jika dicari dengan metode determinan akibatnya matriks singular tidak banyak disinggung dalam pembelajaran matematika di jenjang Sekolah Menengah Atas maupun di Perguruan Tinggi sehingga pengetahuan siswa dan mahasiswa hanya sebatas mengetahui bahawa matriks singular tidak memiliki invers dan matriks singular determinannya sama dengan nol. Hanya itu pengetahuan dan wawasan terhadap matriks singular yang didapatkan dalam pembelajaran matematika.

Dengan tidak terdefinisinya invers dan determinan sama dengan nol, pembahasan tentang matriks singular tidak berhenti sampai disitu. Penelitian yang dilakukan oleh Khasanah dan Irawanto tentang invers dari matrik singular bisa didapatkan dengan menggunakan invers Drazin dengan metode kanonik Jordan (Khasanah & Irawanto, 2011). Lebih lanjut penelitian oleh Suhendry dan Suryani, didapat bahwa matriks singular juga mempunyai invers sama halnya dengan matriks nonsingular (Suhendry & Suryani, 2015). Berdasarkan dua penelitian di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa suatu matriks singular mempunyai invers yang dapat dicari dengan metode yang berbeda dari matriks nonsingular.

Melalui hal tersebut, peneliti melihat hal menarik lainnya yang dapat dikaji dan dikembangkan dari penelitian yang ada tentang matriks singular, seperti melakukan pengembangan dalam membentuk suatu himpunan dari matriks singular dan berlaku atau tidaknya sifat-sifat grup pada himpunan dari matriks singular. Berdasarkan paparan permasalahan di atas, maka diperlukan kajian tentang syarat pembentukan grup matriks singular, maka dilakukanlah suatu penelitian tentang " Penentuan Syarat Pembentukan Grup Matriks Singular" untuk menjawab dan menyelesaikan permasalahan yang sudah dijelaskan di atas.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan jenis penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif adalah menggali untuk menemukan atau mengetahui suatu konsep dengan melakukan penjajakan terhadap konsep tersebut (Rachmawati, 2012). Penelitian ekploratif untuk mengidentifikasi sifat-sifat suatu gejala atau peristiwa. Metode eksploratif bergantung variabel-variabel atau hubungan-hubungan yang diperlukan untuk memecahkan masalah (Mudjiyanto, 2018).

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Grup Matriks Singular Berordo 2 × 2

Suatu matriks singular 2×2 dapat membangun himpunan matriks singular sesuai definisi berikut:

Definisi 1 (Himpunan Matriks Bergenerator)

Misalkan $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $\mathcal{G}_S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n : n \in \mathbb{Z} \right\}$ disebut himpunan matriks yang dibangun oleh S. Dalam hal ini, S disebut generator dari $\mathcal{G}_S$. Jika $\bar{S}$ adalah matriks singular, maka himpunan yang dibangun adalah himpunan matriks singular $\overline{\mathcal{G}_S}$.

Teorema 1

Misalkan $\bar{S} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sembarang matriks singular.

Jika $\bar{S}$ dapat didiagonalisasi, maka

1. Dengan pendiagonalisasian matriks $\bar{S}$, didapat himpunan matriks yang dibangun oleh $\bar{S}$, dapat dinyatakan sebagai

$$\overline{\mathcal{G}_S} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{a(a+d)^n}{(a+d)} & \frac{b(a+d)^n}{(a+d)} \\ \frac{c(a+d)^n}{(a+d)} & \frac{d(a+d)^n}{(a+d)} \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (1)$$

2. $\overline{\mathcal{G}_S}$ adalah himpunan matriks yang beranggotakan matriks singular.

Contoh 1: (Penerapan Teorema 1)

Matriks $\bar{S}$ yang menjadi generator.

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, |\bar{S}| = 0$$

Diagonalisasi dari matriks $\bar{S}$, didapat $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ dan bentuk perpangkatan dari $\bar{S}$ adalah $\bar{S}^n = \begin{bmatrix} \frac{5^n.1}{5} & \frac{5^n.2}{5} \\ \frac{5^n.1}{2{,}5} & \frac{5^n.2}{2{,}5} \end{bmatrix}$. Sehingga, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ membentuk himpunan matriks singular dengan bentuk $\overline{\mathcal{G}_S} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5^n.1}{5} & \frac{5^n.2}{5} \\ \frac{5^n.2}{5} & \frac{5^n.4}{5} \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Teorema berikut menjelaskan tentang syarat-syarat pembentukan grup pada himpunan matriks singular.

Teorema 2 (Grup Matriks Singular 2×2)

Himpunan matriks singular yang dibangun oleh generator

$\bar{S} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \bar{S}$ dapat didiagonalisasi dengan bentuk

$$\overline{\mathcal{G}_S} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{a(a+d)^n}{(a+d)} & \frac{b(a+d)^n}{(a+d)} \\ \frac{c(a+d)^n}{(a+d)} & \frac{d(a+d)^n}{(a+d)} \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2)$$

Membentuk grup dengan operasi perkalian.

Untuk membuktikan $\overline{\mathcal{G}_S}$ membentuk grup dengan operasi perkalian diperlukan empat langkah, yaitu:

Pertama, ambil $A, B \in \overline{\mathcal{G}_S}$. Akan dibuktikan $\bar{A} \times \bar{B} \in \overline{\mathcal{G}_S}$. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa $\bar{A} \times \bar{B} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, sehingga terbukti $\overline{\mathcal{G}_S}$ tertutup terhadap operasi perkalian. Kedua, ambil $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, akan dibuktikan $(\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa $(\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$, sehingga terbukti bahwa operasi bersifat asosiatif. Ketiga, pada umumnya identitas matriks I tidak berlaku untuk matriks singular, sehingga perlu dicari matriks identitas yang berlaku untuk matriks singular. Dalam kasus ini, karena bentuk dari himpunan matriks singular adalah $\overline{\mathcal{G}_S} = \left\{ \begin{bmatrix} a(a+d)^{n-1} & b(a+d)^{n-1} \\ c(a+d)^{n-1} & d(a+d)^{n-1} \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ maka untuk identitas dari himpunan matriks singular $\overline{\mathcal{G}_S}$ adalah $\overline{I_S} = \begin{bmatrix} a(a+d)^{-1} & b(a+d)^{-1} \\ c(a+d)^{-1} & d(a+d)^{-1} \end{bmatrix}$ yang diperoleh dengan mensubsitusi nilai $n = 0$. Ambil $\overline{I_S} \in \overline{\mathcal{G}_S}, \forall \bar{A} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, akan dibuktikan $\bar{A} \times \overline{I_S} = \overline{I_S} \times \bar{A} = \bar{A}$. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh $\bar{A} \times \overline{I_S} = \overline{I_S} \times \bar{A} = \bar{A}$, sehingga terbukti bahwa ada $\overline{I_S} \in \overline{\mathcal{G}_S}$ sebagai elemen identitas. Keempat, pada umumnya dengan menggunakan metode determinan, invers dari matriks singular tidak terdefinisi, sehingga diperlukan cara lain untuk menentukan invers dari matriks singular. Dalam kasus ini, karena bentuk dari himpunan matriks singular adalah $\overline{\mathcal{G}_S} = \left\{ \begin{bmatrix} a(a+d)^{n-1} & b(a+d)^{n-1} \\ c(a+d)^{n-1} & d(a+d)^{n-1} \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$, maka untuk invers dari himpunan matriks singular $\overline{\mathcal{G}_S}$ adalah dengan dipangkatkan bilangan negatif dari n , sehingga ketika dioperasikan menghasilkan identitas berupa $\overline{I_S}$. Ambil $A \in \overline{\mathcal{G}_S}, \exists \bar{Z} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, akan dibuktikan $\bar{A} \times \bar{Z} = \bar{Z} \times \bar{A} = \overline{I_S}$. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh $\bar{A} \times \bar{Z} = \bar{Z} \times \bar{A} = \overline{I_S}$, Sehingga terbukti bahwa bahwa setiap anggota $\overline{\mathcal{G}_S}$ mempunyai invers di $\overline{\mathcal{G}_S}$.

Teorema berikut menjelaskan tentang grup abelian yang terbentuk

Teorema 3: Grup Abelian (Grup Komutatif)

Jika ($\overline{\mathcal{G}_S}$, $\times$) adalah grup matriks singular yang abelian, maka $\forall \bar{\mathrm{A}}, \bar{\mathrm{B}} \in \overline{\mathcal{G}_S}$ berlaku $\bar{\mathrm{A}} \times \bar{\mathrm{B}} = \bar{\mathrm{B}} \times \bar{\mathrm{A}}$.

Berikut ~~adalah~~ pembuktikan ($\overline{\mathcal{G}_S}$, $\times$) adalah grup abelian:

Ambil $\bar{A}, \bar{B} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, akan dibuktikan $\bar{A} \times \bar{B} = \bar{B} \times \bar{A}$. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh $\bar{A} \times \bar{B} = \bar{B} \times \bar{A}$. Sehingga, terbukti ($\overline{\mathcal{G}_S}$, $\times$) merupakan grup abelian (grup komutatif).

Untuk memperjelas teorema di atas berikut diberikan contoh.

Contoh 2:

Berdasarkan matriks yang diambil dari Contoh 1,

$\overline{\mathcal{G}_S} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5^n.1}{5} & \frac{5^n.2}{5} \\ \frac{5^n.2}{5} & \frac{5^n.4}{5} \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$. Pembuktian syarat-syarat grup pada $\overline{\mathcal{G}_S}$ yang telah terbentuk sesuai dengan Teorema 2.

a. Tertutup terhadap operasi perkalian.
   Ambil $\bar{A}, \bar{B} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, akan dibuktikan $\bar{A} \times \bar{B} \in \overline{\mathcal{G}_S}$. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh $\bar{A} \times \bar{B} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, sehingga dapat disimpulkan $\overline{\mathcal{G}_S}$ tertutup terhadap operasi perkalian.

b. Operasi bersifat asosiatif.
   Ambil $A, B, C \in \overline{\mathcal{G}_S}$, akan dibuktikan $(\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh $(\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$, sehingga dapat disimpulkan operasi bersifat asosiatif.
c. Ada elemen identitas.
   Pada umumnya identitas matriks I tidak berlaku untuk matriks singular, sehingga perlu dicari matriks identitas yang berlaku untuk matriks singular. Dalam kasus ini, karena bentuk dari himpunan matriks singular adalah $\overline{\mathcal{G}_S} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5^n.1}{5} & \frac{5^n.2}{5} \\ \frac{5^n.2}{5} & \frac{5^n.4}{5} \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$, maka untuk identitas dari himpunan matriks singular $\overline{\mathcal{G}_S}$ adalah $\overline{I_S} = \begin{bmatrix} \frac{5^0.1}{5} & \frac{5^0.2}{5} \\ \frac{5^0.1}{2,5} & \frac{5^0.2}{2,5} \end{bmatrix}$ yang diperoleh dengan mensubsitusi nilai $n = 0$. Ambil $\overline{I_S} \in \overline{\mathcal{G}_S}, \forall \bar{A} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, akan dibuktikan $\bar{A} \times \overline{I_S} = \overline{I_S} \times \bar{A} = \bar{A}$. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh $\bar{A} \times \overline{I_S} = \overline{I_S} \times \bar{A} = \bar{A}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa ada $\overline{I_S} \in \overline{\mathcal{G}_S}$ sebagai elemen identitas.

d. Setiap anggota himpunan mempunyai invers.
   Pada umumnya dengan menggunakan metode determinan, invers dari matriks singular tidak terdefinisi, sehingga diperlukan cara lain untuk menentukan invers dari matriks singular. Dalam kasus ini, karena bentuk dari himpunan matriks singular adalah $\overline{\mathcal{G}_S} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5^n.1}{5} & \frac{5^n.2}{5} \\ \frac{5^n.2}{5} & \frac{5^n.4}{5} \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$, maka untuk invers dari $\overline{\mathcal{G}_S}$ adalah dengan dipangkatkan bilangan negatif dari n , sehingga ketika dioperasikan menghasilkan identitas berupa $\overline{I_S}$.
   Ambil $\bar{A} \in \overline{\mathcal{G}_S}, \exists \bar{Z} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, akan dibuktikan $A \times Z = Z \times A = \overline{I_S}$. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh $A \times Z = Z \times A = \overline{I_S}$, Sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap anggota $\overline{\mathcal{G}_S}$ mempunyai invers di $\overline{\mathcal{G}_S}$.

e. Grup yang terbentuk adalah grup abelian.
   Ambil $\bar{A}, \bar{B} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, akan dibuktikan $\bar{A} \times \bar{B} = \bar{B} \times \bar{A}$. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh hasil kali kedua ruas sama maka $\bar{A} \times \bar{B} = \bar{B} \times \bar{A}$. Sehingga, terbukti $\overline{\mathcal{G}_S}$ merupakan grup abelian.

Contoh 3:

Matriks singular yang menjadi generator adalah $\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, |\bar{S}| = 0$. Nilai eigen yang memenuhi yaitu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Leon (2001) menerangkan bahwa jika A adalah matriks $n \times n$ yang mempunyai vektor eigen yang lebih sedikit dari n, maka dinamakan A adalah matriks defektif. Maka suatu matriks defektif tidak dapat didiagonalisasi. Sehingga diperoleh himpunan $\overline{\mathcal{T}_S} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$. Himpunan tersebut tidak memenuhi syarat-syarat grup. Hal ini menunjukkan bahwa tidak semua matriks singular dapat membentuk grup.

3. 2 Sifat-Sifat Grup Matriks Singular

Pada grup matriks nonsingular, berlaku sifat penghapusan serta sifat ketunggalan identitas dan invers. Inipun dapat berlaku pada grup matriks singular. Secara jelas dapat dituliskan pada Teorema 4 dan Teorema 5 berikut:

Teorema 4: Misalkan $(\overline{\mathcal{G}_S}, \times)$ adalah grup matriks singular, jika $\bar{A}, \bar{X}, \bar{Y} \in \overline{\mathcal{G}_S}$, maka berlaku:

a. Jika $\bar{A} \times \bar{X} = \bar{A} \times \bar{Y}$ maka $\bar{X} = \bar{Y}$.
b. Jika $\bar{X} \times \bar{A} = \bar{Y} \times \bar{A}$ maka $\bar{X} = \bar{Y}$.

Berdasarkan hasil penelitian, sifat penghapusan kiri dan kanan berlaku untuk grup matriks singular.

Teorema 5: Jika $(\overline{\mathcal{G}_S}, \times)$ adalah grup matriks singular, maka berlaku:

a. Jika $\overline{I_e}$, $\overline{I_f}$ adalah identitas di $\overline{\mathcal{G}_S}$ maka $\overline{I_e} = \overline{I_f}$.
b. Jika $\bar{X}, \bar{Y}$ adalah invers dari $\bar{A}$ di $\overline{\mathcal{G}_S}$ maka $\bar{X} = \bar{Y}$.

Berdasarkan hasil penelitian, invers dari setiap unsur di grup matriks singular $\overline{\mathcal{G}_S}$ adalah tunggal.

3.3 Kasus Khusus tentang Matriks Singular

Pada pembahasan ini dibahas kasus khusus tentang matriks singular. Setelah diteliti lebih lanjut, ternyata tidak semua matriks singular dapat memenuhi syarat-syarat dalam pembentukan grup seperti yang telah dipaparkan pada contoh 3 di atas.

Namun dalam suatu kasus lain ada himpunan matriks singular yang hanya mempunyai satu anggota himpunan, namun tetap memenuhi syarat-syarat pembentukan grup. Contoh sederhana yang peneliti gunakan dalam penelitian ini yaitu $\bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Diagonalisasi dari matriks $\bar{S}$ adalah $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan bentuk berpangkat dari matriks $\bar{S}$ adalah $\bar{S}^n = \begin{bmatrix} 1^n & 1^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Sehingga didapat himpunan $\overline{\mathcal{M}_S} = \left\{\begin{bmatrix} 1^n & 1^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z}\right\}$. Berapapun nilai untuk n matriks tersebut menghasilkan satu matrik yaitu matriks $\bar{S}$ itu sendiri. Untuk membuktikan bahwa himpunan $\overline{\mathcal{M}_S}$ adalah grup, pembuktian bisa dilakukan secara cepat karena anggota pada himpunan $\overline{\mathcal{M}_S}$ hanya memuat satu anggota himpunan. Pembuktian tertutup terhadap operasi perkalian, operasi bersifat asosiatif, ada elemem identitas dan setiap anggota memiliki invers bisa dibuktikan dengan satu langkah berikut:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Sehingga terbukti bahwa himpunan $\overline{\mathcal{M}_S}$ adalah grup terhadap operasi perkalian.

3.4 Pembahasan

Untuk menentukan identitas dan invers dari suatu matriks singular, digunakan metode pseudo identitas dan pseudo invers sesuai dengan pendapat Pikatan (1997). bahwa identitas dan invers yang bersifat terbatas seperti S^0 dan S^{-1} diusulkan untuk diberi nama *pseudo-identitas* dan *pseudo-invers*. Sebuah matriks mempunyai invers jika dan hanya jika matriks tersebut nonsingular atau dengan kata lain kolom-kolom atau baris-barisnya bebas linier. Jika matriks tersebut singular atau jika kolom-kolom atau baris-barisnya bergantung linier, maka dibutuhkan sebuah invers matriks yang diperumum (Yuliza et al., 2018). Dalam penelitian ini, metode yang digunakan dalam perhitungan untuk membentuk suatu himpunan matriks singular adalah dengan memanfaatkan diagonalisasi. Ketika pembentukan suatu himpunan matriks singular dan penentuan identitas dan invers dari matriks singular maka lebih lanjut peneliti memanfaatkan kedua hal tersebut untuk membuktikan berlakunya syarat-syarat grup pada himpunan matriks singular. Sehingga yang didapatkan adalah terbentuknya grup himpunan matriks singular.

Setelah terbentuknya grup himpunan matriks singular, perhitungan lebih lanjut menunjukkan bahwa tidak semua himpunan matriks singular dapat membentuk grup. Hal ini disebabkan karena tidak semua matriks generator dapat didiagonalisasi. Perhitungan pada hasil penelitian menunjukkan bahwa himpunan dari matriks singular yang defektif tidak dapat membentuk grup. Himpunan matriks singular yang defektif adalah himpunan yang hanya memiliki satu anggota himpunan yaitu matriks defektif itu sendiri. Pembuktian syarat-syarat grup pada himpunan ini menunjukkan bahwa himpunan matriks singular defektif tidak memenuhi syarat-syarat pembentuka grup.

Perhitungan yang dilakukan pada hasil penelitian yang telah dibahas sebelumnya, peneliti hanya membatasi perhitungan bentuk umum pada grup matriks singular berordo 2×2. Untuk perhitungan grup matriks singular berordo 3×3 dapat dilakukan sesuai dengan langkah-langkah perhitungan pada grup matriks singular berordo 2×2. Perhitungan bentuk umum dan grup matriks singular yang berordo lebih besar, langkah-langkah yang dilakukan sesuai dengan perhitungan pada grup matriks singular berordo 2×2. Membatasi perhitungan hanya pada matriks 2×2 dapat mengefisiensi waktu peneliti dalam melakukan perhitungan.

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa Terdapat grup berbentuk $\overline{\mathcal{G}_S} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{a(a+d)^n}{(a+d)} & \frac{b(a+d)^n}{(a+d)} \\ \frac{c(a+d)^n}{(a+d)} & \frac{d(a+d)^n}{(a+d)} \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ dengan operasi perkalian baku pada matriks yang dibangun dari matriks singular $\bar{S} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dimana $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ yang dapat didiagonalisasi. Selain itu pada penelitian ini diperoleh matriks singular 2×2 yang tidak dapat membentuk grup yaitu matriks singular 2×2 yang tidak dapat didiagonalisasi atau disebut matriks defektif dan pada grup $\overline{\mathcal{G}_S}$ berlaku sifat $\forall \bar{A}, \bar{X}, \bar{Y} \in \overline{\mathcal{G}_S}$ sedemikian sehingga: (a) Jika $\bar{A} \times \bar{X} = \bar{A} \times \bar{Y}$ maka $\bar{X} = \bar{Y}$; (b) Jika $\bar{X} \times \bar{A} = \bar{Y} \times \bar{A}$ maka $\bar{X} = \bar{Y}$. Hal ini menunjukkan bahwa pada grup matriks singular $\overline{\mathcal{G}_S}$ berlaku sifat penghapusan.

5. REFERENSI

Dewi, N., Eliyati, N., & Marbun, O. H. (2011). Kajian Struktur Aljabar Grup pada Himpunan Matriks yang Invertibel. *Jurnal Penelitian Sains*, *14*(1), 168299.

Faizah, H. (2019). Pemahaman Mahasiswa tentang Konsep Grup pada Mata Kuliah Struktur Aljabar. *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, *4*(1), 23. https://doi.org/10.30651/must.v4i1.2267

Khasanah, L., & Irawanto, B. (2011). Menentukan Invers Drazin dari Matriks Singular. *Jurnal Matematika*, *14*(3), 137–142.

Leon, S. J. (2001). *Aljabar Linear dan Aplikasinya* (5th ed.). Erlangga.

Mudjiyanto, B. (2018). Tipe Penelitian Eksploratif Komunikasi. *Jurnal Studi Komunikasi Dan Media*, *22*(1), 65–74. https://doi.org/10.31445/jskm.2018.220105

Pikatan, S. (1997). Pseudo-Identitas dan Pseudo-Invers Matriks Singular. *Integral*, *2*(1), 11–14.

Rachmawati, I. (2012). Eksplorasi Etnomatematika Masyarakat Sidoarjo. *MATHEdunesa*, *1*(1).

Sripatmi, Arjudin, & Septriana, A. Y. (2018). *Aljabar Abstrak*. Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Mataram.

Suhendry, & Suryani, I. (2015). *Menentukan Invers Drazin dari Matriks Singular Dengan Metode Leverrier Faddeev*. *I*(1), 27–38.

Yuliza, E., Amran, A., & Triyani. (2018). Implementasi Invers Matriks Tergeneralisasi pada Sistem Persamaan Linier. *Anual Research Seminar 2018*, *4*(1), 978–979.

C28. Dr. Amrullah, M.Si

ORIGINALITY REPORT

17%	12%	7%	5%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	Submitted to UIN Raden Intan Lampung Student Paper	3%
2	eprints.unram.ac.id Internet Source	2%
3	www.scribd.com Internet Source	2%
4	core.ac.uk Internet Source	1%
5	download.garuda.ristekdikti.go.id Internet Source	1%
6	repository.ub.ac.id Internet Source	1%
7	etheses.uin-malang.ac.id Internet Source	1%
8	Karsoni Berta Dinata, Junaidi Junaidi. "Etnomatematika: Sebuah Eksplorasi Matematika dalam Budaya Lampung Pepadun", EDUKATIF : JURNAL ILMU PENDIDIKAN, 2022 Publication	1%

9	journal.unnes.ac.id Internet Source	<1 %
10	id.scribd.com Internet Source	<1 %
11	jurnal.unej.ac.id Internet Source	<1 %
12	jurnal.stkipbjm.ac.id Internet Source	<1 %
13	ojs.unpatti.ac.id Internet Source	<1 %
14	repository.stie-aub.ac.id Internet Source	<1 %
15	teknologisuci.blogspot.co.id Internet Source	<1 %
16	Himmatul Mursyidah. "ALGORITMA POLINOMIAL MINIMUM UNTUK MEMBENTUK MATRIKS DIAGONAL DARI MATRIKS PERSEGI", AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika, 2017 Publication	<1 %
17	digilib.uns.ac.id Internet Source	<1 %
18	ejournal.uin-suska.ac.id Internet Source	<1 %

19	fr.scribd.com Internet Source	<1 %
20	pom-kampir.blogspot.com Internet Source	<1 %
21	repository.iainpalopo.ac.id Internet Source	<1 %
22	Nida Triana Lathifah, Yuyu Yuhana, Cecep Anwar Hadi Firdos Santosa. "Analysis of mathematical communication ability reviewing from learning style of students class VIII in the think-pair-share learning", Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika, 2022 Publication	<1 %
23	Bambang Mudjiyanto. "TIPE PENELITIAN EKSPLORATIF KOMUNIKASI", Jurnal Studi Komunikasi dan Media, 2018 Publication	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	On		

C28. Dr. Amrullah, M.Si

GRADEMARK REPORT

FINAL GRADE

/0

GENERAL COMMENTS

Instructor

PAGE 1

PAGE 2

PAGE 3

PAGE 4

PAGE 5

PAGE 6

PAGE 7

PAGE 8

PAGE 9