B18

by Adhitya Wisnu

Submission date: 17-May-2022 08:55AM (UTC-0500)
Submission ID: 1838374895
File name: Lampiran_B18.pdf (1.22M)
Word count: 2622
Character count: 15720

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018

Tema

"Pengembangan Matematika dalam Meningkatkan Daya Saing Bangsa"

Malang, 24-26 Juli 2018

ISBN: 978-623-94020-0-6

Prosiding
Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018

dengan tema
“Pengembangan Matematika dalam Meningkatkan Daya Saing Bangsa”

Malang, 24-26 Juli 2018

Diterbitkan oleh
Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS) Perwakilan Surabaya

Diselenggarakan oleh

IndoMS

Jurusan Matematika Universitas Brawijaya

ISBN: 978-623-94020-0-6

Ukuran: 29,7 cm × 21 cm

Juli 2020

TIM REVIEWER DAN EDITOR

Prosiding
Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018
dengan tema
"Pengembangan Matematika dalam Meningkatkan Daya Saing Bangsa"

TIM REVIEWER

Nur Shofianah, S.Si.,M.Si.,Ph.D.
Dra. Trisilowati, M.Sc.,Ph.D.
Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
Ummu Habibah, S.Si., M.Si., Ph.D.
Rahma Fitriani, S.Si., M.Sc., Ph.D.
Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.
Dr. Umu Sa'adah, M.Si.
Syaiful Anam, S.Si., MT., Ph.D.

TIM EDITOR

Indah Yanti, S.Si., M.Si.
Nurjannah, S.Si., M.Sc., Ph.D.

Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS)
Perwakilan Surabaya
Alamat:
Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Jl. Raya ITS, Keputih Sukolilo Surabaya

SUSUNAN PANITIA PELAKSANA
KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XIX-2018

Pelindung:
Rektor Universitas Brawijaya

Pembina:
Para Wakil Rektor Universitas Brawijaya

Penanggung Jawab:
Dekan FMIPA UB
Wakil Dekan I FMIPA UB
Wakil Dekan II FMIPA UB
Wakil Dekan III FMIPA UB

Panitia Pengarah:
Presiden IndoMS (Dr. Intan Muchtadi)
Sekretaris IndoMS (Sisilia Sylviani, M.Si.)
Bendahara IndoMS (Dr. Ikha Magdalena)
Dr. Abadi (Gubernur IndoMS Wilayah Jawa Timur)
Dr. Fatmawati (Sekretaris IndoMS Wilayah Jawa Timur)
Wakil Presiden I Bidang Organisasi dan Kerjasama IndoMS (Prof. Dr. Syafrizal Sy)
Wakil Presiden II Bidang Penelitian dan Publikasi IndoMS (Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.)
Wakil Presiden III Bidang Pendidikan dan Pengembangan IndoMS (Prof. Dr. St. Budi Waluya)
Ketua Jurusan Matematika UB (Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.)

Penasehat:
Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes.
Prof. Dr. Ir. Loekito Adi Soehono, M.Agr.
Prof. Dr. Ir. Waego Hadi Nugroho
Prof. Dr. Ir. Ni Wayan Surya Wardhani, MS.
Prof. Dr. Ir. Henny Pramoedyo, MS.
Dr. Ir. Maria Bernadetha Theresia Mitakda
Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
Prof. Dr. Marjono, M.Phil.

Panitia Pelaksana

Ketua Pelaksana	:	Syaiful Anam, S.Si, M.T., Ph.D.
Sekretaris	:	Indah Yanti, S.Si, M.Si.
		Luthfatul Amaliana, S.Si., M.Si.

Bendahara : Kwardiniya Andawaningtyas, S.Si., M.Si.
Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D.
Surakhman, S.AP., M.M.

Sie Kesekretariatan, Informasi dan Web

Koordinator

Darmanto, M.Si

Anggota

Dwi Mifta Mahanani, S.Si., M.Si.
Zuraidah Fitriah, S.Si., M.Si.
Mila Kurniawaty, S.Si., M.Si., Ph.D.
Agung Surya Mahendra, S.Si.
Riesky Ovta Hidayat, A.Md.
Widjianto

Sie Humas, Publikasi, Dokumentasi, dan Dana

Koordinator

Dr. Suci Astutik, S.Si., M.Si.

Anggota

Prof. Dr. Marjono, M.Phil.
Dr. Dra. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si.
Ir. Solimun, MS.
M. Muslikh, M.Si.
Dr. Ir. Atiek Iriany, MS.
Yogie Meru Kusuma, A.Md.
Karyadi Eka Putra, A.Md.
Tri Wahyu Basuki, S.E.
Djoema'ali, S.E.

Sie Ilmiah dan Prosiding

Koordinator

Nurjannah, S.Si, M.Sc, Ph.D.

Anggota

Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D.
Trisilowati, M.Sc., Ph.D.
Ummu Habibah, S.Si., M.Si., Ph.D.
Rahma Fitriani, S.Si., M.Sc., Ph.D.
Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.
Dr. Umu Sa'adah, M.Si.

Sie Acara dan Sidang

Koordinator

Dr. Noor Hidayat, M.Si.

Anggota

Dr. Ani Budi Astuti, M.Si.
Dr. Moch. Aruman Imron, M.Si.
Achmad Efendi, S.Si., M.Sc., Ph.D.
Dra. Endang Wahyu Handamari, M.Si.
Sa‘adatul Fitri, S.Si., M.Sc.

Sie Konsumsi

Koordinator

Vira Hari Krisnawati, S.Si., M.Sc.

Anggota

Dra. Ari Andari, MS.
Ir. Heni Kusdarwati, MS.
Eni Sumarminingsih, S.Si., M.M.
Ririen Mujiastuti, S.E.
Pujiyanti, A.Md.
Muslikhah, S.E.

Sie Transportasi

Koordinator

Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc, Ph.D.

Anggota

Drs. Imam Nurhadi Purwanto, M.T.
Drs. Marsudi, MS.
Samingun Handoyo, S.Si., M.Cs.
Ir. Mudjiono, MM.
Drs. Bambang Sugandi, M.Si.
Sukarman, S.H.
Syaiful Bakri

Sie Perlengkapan

Koordinator

Moh. Amin, S.E.

Anggota

Dr. Sobri Abusini, M.T.
Dr. Adji Achmad Rinaldo Fernandes, S.Si., M.Sc.

Mai Firman
Sahroni
Hadi Wiyono
Mohammad Romadhoni, A.Md.
Misno
Agung Kurniawan
Hasan Muhajir, S.T.
Heru Setiawan
Nurul Yakin
Suliono

KATA PENGANTAR

Pertama-tama, kami memanjatkan puji syukur ke hadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayahNya sehingga Buku Prosiding Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018 dapat diterbitkan. KNM XIX diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Universitas Brawijaya bekerjasama dengan Indonesian Mathematical Society (IndoMS). KNM XIX merupakan kegiatan yang diselenggarakan oleh IndoMS bekerjasama dengan Jurusan Matematika Universitas Brawijaya. Konferensi ini mengambil tema Pengembangan Matematika dalam Meningkatkan Daya Saing Bangsa.

KNM XIX bertujuan sebagai wadah mendesiminasikan dan mengomunikasikan hasil-hasil penelitian dalam bidang Matematika, Statistika, Ilmu Komputer dan pembelajarannya. Para peneliti, pendidik, pengguna, dan peminat matematika dari seluruh Indonesia dapat saling berbagi dan saling bertukar pikiran dalam bentuk seminar untuk mendiseminasikan dan mempublikasikan hasil-hasil penelitian mereka, baik kajian teoritis, aplikasi, maupun edukasi matematika. Pada kegiatan KNM XIX selain menyelenggarakan konferensi/seminar untuk mendiseminasikan dan mempublikasikan hasil-hasil penelitian, KNM XIX juga menyelenggarakan kongres untuk pemilihan Presiden IndoMS, pemilihan lokasi KNM XX pada tahun 2020 dan pemilihan lokasi International Conference on Mathematics and Its Applications (IICMA). Prosiding ini berisikan 195 makalah yang telah dipresentasikan pada Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX dan direkomendasi oleh Tim Penilai Makalah untuk dimuat dalam prosiding.

Terwujudnya Prosiding ini tidak terlepas dari kerja keras tim prosiding dan dukungan dari tim Penilai Makalah dan Editor serta penulis makalah. Oleh karena itu, kami atas nama panitia KNM XIX mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya atas partisipasi dan bantuan semua pihak. Semoga Buku Prosiding KNM XIX-2018 ini memberi manfaat kepada pembaca dan penulis.

Ketua Panitia KNM XIX,

Syaiful Anam, S.Si., M.T., Ph.D.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . **iii**

TIM REVIEWER DAN EDITOR . . . . **v**

SUSUNAN PANITIA PELAKSANA KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XIX-2018 . . . . **vii**

KATA PENGANTAR . . . . **xi**

DAFTAR ISI . . . . **xiii**

ALJABAR **1**

ANALISIS ENDOMORFISMA MODUL BEBAS

Ikbal Fathul Haditia1, Ni Wayan Switrayni, Qurratul Aini, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana 3

COLLISION ATTACK PADA SKEMA LIN ET AL.

Zefriani Erza Dwita dan Susila Windarta 9

DEKOMPOSISI MODUL PROJEKTIF YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS GELANGGANG PEMBAGI ELEMENTER

Eka Wulan R., Fransiskus Fran, Helmi 15

DESKRIPSI SPEKTRUM MODUL BEBAS ATAS DAERAH IDEAL UTAMA YANG DIBANGUN SECARA HINGGA TERHADAP SUATU BASIS YANG DIBERIKAN

Rani S. Tarmidi, Afif Humam, Pudji Astuti 21

GRAF IDENTITAS DARI GRUP DIHEDRAL

Ahmad Muhammad Muftirridha, Noor Hidayat 27

GRUP INVERSE TERKAIT MATRIKS LESLIE YANG STOKASTIK

Teduh Wulandari Mas'oed, Agah D. Garnadi 33

HUBUNGAN ANTARA ORDER KRULL DAN ORDER ASANO

Mu'amar Musa Nurwigantara dan Indah Emilia Wijayanti 41

MODUL TANPA TORSI

Valentino Risali dan Indah Emilia Wijayanti 47

RG-KOMODUL BERSIH

Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, dan Budi Surodjo 53

SIFAT IRISAN RADIKAL JACOBSON

Puguh Wahyu Prasetyo 59

SIFAT-SIFAT MODUL $\mathscr{U}$-BEBAS

Fitriani, Indah Emilia Wijayanti dan Budi Surodjo 65

SOLUSI PRIMITIF PERSAMAAN DIOPHANTINE $x^2+9y^2=z^2$

Shinta Irabyatul Rahman dan Noor Hidayat 71

STRUKTUR EIGEN PADA MATRIKS SISTEM MODEL GERAKAN BERJALAN ATAS ALJABAR MAKS-PLUS

Lidya Christina Sugiarto, Siswanto, dan Sutanto 77

ANALISIS ENDOMORFISMA MODUL BEBAS

Ikbal Fathul Haditia[1], Ni Wayan Switrayni [2], Qurratul Aini [2], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana [2]

[1] Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mataram, Indonesia
email: ikbalfathulhaditia@gmail.com

[2] Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mataram, Indonesia
email: niwayan.switraynienulis@unram.ac.id ; qurratulaini.aini@unram.ac.id ;
adhitya.wardhana@unram.ac.id

Abstrak. *Suatu modul merupakan generalisasi dari ruang vektor, dengan skalar yang beraksi berasal dari gelanggang. Suatu modul dinamakan modul bebas jika modul tersebut mempunyai basis. Suatu basis bagi ruang vektor dapat dikonstruksi dari vektor-vektor eigen dari suatu operator liniernya. Tujuan dari penelitian ini yaitu mengkonstruksi basis bagi modul bebas yang terdiri atas vektor-vektor eigen dari endomorfismanya. Suatu basis bagi suatu modul bebas yang terdiri dari vektor-vektor eigen dapat dikonstruksi melalui endomorfismanya yang dapat didiagonalisasi.*

Kata Kunci: endomorfisma, modul bebas , diagonalisasi

1 PENDAHULUAN

Dekomposisi Nilai Singular (SVD) adalah salah satu alat dalam aljabar linier yang kegunaannya sangat luas. Dari sistem dinamik sampai olah data statistik banyak memanfaatkan SVD. Beberapa aplikasi langsung dari SVD adalah perhitungan rank, pseudoinvers, metode least square, hingga aproximasi matriks [1]. Dalam penerapannya, SVD akan sangat erat kaitannya dengan proses diagonalisasi pada endomorfisma ruang vektor atau matriks atas real.

Suatu endomorfisma pada suatu ruang vektor dikatakan dapat didiagonalkan jika matriks representasinya dapat didiagonalkan. Masalah diagonalisasi opertor linear pada suatu ruang vektor ekivalen dengan masalah konstruksi basis bagi ruang vektor tersebut yang terdiri atas vektor-vektor eigennya. Pada artikel ilmiah ini, akan diberikan generalisasi dari proses diagonalisasi pada ruang vektor, yaitu diagonalisasi endomorfisma modul bebas atas ring komutatif yang berakhir dengan pembentukan basis baru bagi modul tersebut.

2 HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Nilai eigen dan vektor eigen

Nilai eigen dan vektor eigen pada modul dapat didefinisikan dengan cara yang serupa seperti halnya pada ruang vektor. Berikut akan dipaparkan beberapa teori, definisi-definisi dan teorema yang berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen pada modul bebas.

Definisi 1 *Misalkan* $A \in M_{n\times n}(R)$, *dengan* $M_{n\times n}(R)$ *adalah himpunan matriks yang entri-entrinya berasal dari ring komutatif, maka*

a. *Suatu elemen* $\lambda \in R$ *disebut nilai eigen pada A jika* $Av = \lambda v$ *untuk suatu* $v \in R^n$ *dengan* $v \neq 0$.
b. *Suatu vektor tak nol* $v \in R^n$ *dinamakan vektor eigen dari A jika* $Av = \lambda v$ *untuk suatu* $\lambda \in R$.
c. $\vartheta(A) = \{\lambda \in R \mid \lambda$ *adalah suatu nilai eigen pada A*$\}$ *disebut spektrum dari A.*
d. $E(\lambda) = \{v \in R^n \mid Av = \lambda v, v \in R^n\}$ *dinamakan ruang eigen yang berpadanan dengan* $\lambda \in \vartheta(A)$ [2].

Spektrum dari matriks A dilambangkan dengan $\vartheta(A)$ adalah himpunan semua nilai eigen matriks A. Misalkan λ adalah elemen spektrum A, vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor-vektor taknol di dalam ruang solusi $(\lambda I - A)v = 0$. Nilai eigen dan vektor eigen juga sering disebut dengan nilai karasteristik dan vektor karasteristik. Jelas bahwa $E(\lambda) = NS(\lambda I_n - A)$, dimana NS menotasikan *null space* (ruang null/ruang solusi).

Adapun definisi dari polinomial karakteristik dapat dilihat pada Definisi 2 berikut:

Definisi 2 *Diberikan* $A \in M_{n\times n}(R)$. *Polinomial karasteristik dari A, dinotasikan dengan* $C_A(\lambda)$ *didefinisikan dengan* $C_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$ [2].

Telah diketahui bahwa untuk mencari nilai eigen dari suatu matriks dapat dicari melalui polinomial karakteristiknya, berikut ini dipaparkan sebuah lemma yang dapat digunakan untuk mencari nilai eigen.

Lemma 1 *Misalkan* $A \in M_{n\times n}(R)$, *maka pernyataan-pernyataan di bawah ini sama*

a. $\vartheta(A)$
b. $\{\lambda \in R \mid NS(\lambda I_n - A) \neq 0\}$
c. $\{\lambda \in R \mid C_A(\lambda) \in Z(R)\}$, *dengan Z(R) merupakan himpunan semua pembagi nol bersama unsur nol dalam R.* [2]

Selanjutnya akan dijabarkan definisi dan notasi akar-akar dari $C_A(\lambda)$.

Definisi 3 *Misalkan* $A \in M_{n\times n}(R)$, *maka* $\Re(\mathfrak{A}) = \{\lambda \in \Re \mid C_A(\lambda) = 0\}$ *disebut himpunan akar-akar* $C_A(\lambda)$ *di R.* [2]

Berikut akan dipaparkan suatu sifat yang dimiliki vektor-vektor eigen dari suatu matriks atas ring komutatif.

Lemma 2 *Misalkan* $\lambda \in \vartheta(A)$*, dan* $Av = \lambda v$ *untuk suatu vektor tak nol* $v \in R^n$*, jika* $\{v\}$ *bebas linier atas R, maka berlaku* $C_A(\lambda) = 0$*.* [2]

Perlu diperhatikan bahwa kebalikan dari Lemma 2 belum tentu berlaku. Artinya, walaupun $\lambda \in \vartheta(A)$, $C_A(\lambda) = 0$ dan $Av = \lambda v$, belum tentu vektor eigen pada A yang bersesuaian dengan λ bebas linier atas R. Dari Definisi 3 dan Lemma 2, telah dijelaskan bahwa $\Re(A)$ merupakan himpunan akar-akar dari $C_A(\lambda)$ di R. Lebih jauh $\Re(A)$ kemudian akan menjadi syarat apakah sebuah matriks dengan entri-entri dari ring komutatif dapat didiagonalkan atau tidak. Berikut akan dijabarkan definisi dari matriks diagonal atas ring komutatif .

Definisi 4 *Diberikan matriks* $A \in M_{n\times n}(R)$*. Matriks* A *dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks* P *yang merupakan sebuah matriks yang invertibel, sedemikian sehingga* $P^{-1}AP=D$ *dengan* D *merupakan matriks hasil diagonalisasi dari* A *dan* D *dikatakan similar dengan matriks* A*.* [2]

Terdapat suatu perbedaan syarat suatu matriks A dapat dibalik jika entri-entrinya berasal dari lapangan dengan jika entri-entrinya hanya merupakan ring komutatif. Berikut akan dijabarkan syarat suatu matriks atas ring komutatif dapat dibalik

Lemma 3 *Diberikan* $A \in M_{n\times n}(R)$ *. Matriks* A *disebut invertible jika dan hanya jika* $det(A) \in U(R)$ *dimana* $U(R)$ *menyatakan unit di R.* [2]

Berikut akan dijabarkan suatu teorema yang menjadi syarat apakah suatu matriks dapat didiagonalkan atau tidak.

Teorema 1 *Diberikan matriks* $A \in M_{nxn}(R)$*. Matriks A dapat didiagonalkan jika dan hanya jika* $\cup_{\lambda \in R(A)} E(\lambda)$ *memuat suatu basis dari R-modul bebas* R^n*.* [2]

Dalam Teorema 1 dinyatakan bahwa untuk menentukan apakah suatu matriks sebarang atas suatu ring komutatif dapat didiagonalkan atau tidak, cukup dengan menyelidiki ruang-ruang eigen matriks tersebut yang bersesuaian dengan semua akar-akar polinomial karakteristiknya. Jika gabungan dari semua ruang eigen ini memuat sejumlah vektor yang bebas linear yang dapat membangun R^n, maka matriks tersebut dapat didiagonalkan.

2.2 Konstruksi basis

Pada sebarang modul bebas M, konstruksi basis baru dari endomorfismnya ekivalen dengan menentukukan apakah matriks representasi nya dapat didiagonalkan atau tidak. Untuk dapat menentukan modul bebas M dapat didiagonalisasi atau tidak, diberikan teorema sebagai berikut

Teorema 2 *Misalkan* M *adalah R-modul bebas dengan rank n, dan* $\theta : M \to M$ *suatu R-endomorfisma. Endomorfisma* θ *dapat didiagonalkan jika dan hanya jika* $\cup_{\lambda \in R(\theta)} E(\lambda)$ *memuat suatu basis bagi M.*

Bukti:

Misalkan B dan B' adalah basis bagi M, dan $[\theta]_{B',B} \in M_{nxn}(R)$ adalah matriks representasi dari θ relatif terhadap basis B dan B'. Berdasarkan Teorema 1 maka $[\theta]_{B',B}$ dapat

didiagoalkan jika dan hanya jika $\cup_{\lambda \in R\left([\theta]_{B',\ B}\right)} E(\lambda)$ memuat suatu basis bagi R^n. Namakan basis tersebut $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Bentuk $B" = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dimana $[v_i]_B = u_i$. Akan ditunjukkan bahwa $B"$ merupakan basis bagi M.
Pertama akan ditunjukkan bahwa $B"$ merupakan himpunan yang bebas linier. Pandang

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n = 0 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow [\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n]_B = [0]_B \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 [v_1]_B + \beta_2 [v_2]_B + ... + \beta_n [v_n]_B = [0]_B \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_n u_n = 0 \tag{4}$$

Karena $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ merupakan basis bagi R^n, maka persamaan (1) hanya dipenuhi oleh $\beta_i = 0\ \forall\ i = 1, ..., n$. Jadi disimpulkan bahwa $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bebas linier.

Akan ditunjukkan bahwa $B"$ merupakan himpunan yang membangun M. Ambil sebarang $v \in M$, maka

$$[v]_B = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \tag{5}$$

$$= \alpha_1 [v_1]_B + \alpha_2 [v_2]_B + ... + \alpha_n [v_n]_B \tag{6}$$

$$= [\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i]_B \tag{7}$$

karena B basis, maka $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, maka $B"$ membangun M.

Disimpulkan bahwa $B"$ merupakan basis bagi M ■

Misalkan diberika suatu endomorfisma modul atas Z_6 sebagai berikut
$\theta : Z_6 \times Z_6 \rightarrow Z_6 \times Z_6$ yang didefinisikan sebagai berikut
$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 4x_1 + x_2)$
Konstruksi suatu basis baru bagi $Z_6 \times Z_6$ dengan basis awal adalah suatu basis standar $B = \left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$!
Akibatnya koordinat basis dari θ terhadap basis B yaitu $[\theta]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.
Nilai eigen dan vektor eigen dari $[\theta]_B$ dapat ditentukan dengan langkah berikut:

$$C_{[\theta]_B}(\lambda) = |\lambda I - A|$$
$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Diperoleh $\vartheta([\theta]_B) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $\Re([\theta]_B) = \{1, 2, 4, 5\}$. Dengan menyelidiki 4 buah ruang eigen yang nilai eigennya merupakan akar polinomial karasteristik di $[\theta]_B$, didapatkan $E(1) = span\left\{\binom{1}{2}\right\}$, $E(2) = span\left\{\binom{0}{1}\right\}$, $E(4) = span\left\{\binom{2}{1}\right\}$, $E(5) = span\left\{\binom{3}{2}\right\}$.
Dapat diperoleh bahwa $[\theta]_B$ similar dengan suatu matriks diagonal D dimana

$$D = P^{-1}[\theta]_B P \tag{8}$$

dengan:
$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan

$P^{-1} = 5 * \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Diperoleh $P^{-1}[\theta]_B P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, diketahui bahwa $\{5, 4\} \subseteq \vartheta([\theta]_B)$.

Jadi, karena P invertible maka vektor-vektor kolom dari matriks P yang tidak lain adalah vektor-vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen 5 dan 4 yaitu

$$\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

membentuk basis bagi $Z_6 \times Z_6$.

Dapat diperoleh bahwa $[\theta]_B$ similar dengan suatu matriks diagonal D' dimana

$$D' = Q^{-1}[\theta]_B Q \tag{9}$$

dengan:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \; dan \; Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $Q^{-1}[\theta]_B Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, dengan $\{1, 2\} \subseteq \vartheta([\theta]_B)$.

Sehingga dapat diperoleh basis lain bagi $Z_6 \times Z_6$ adalah

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

3 KESIMPULAN

Penelitian ini menghasilkan prosedur menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas ring komutatif, karasteristik dari suatu endomorfisma modul bebas yang dapat didiagonalkan, dan prosedur pencarian basis baru bagi suatu modul bebas yang diuraikan sebagai berikut:

1. Untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari $A \in M_n(R)$, digunakan prosedur berikut:
   a. Menentukan polinomial karasteristik $C_A(\lambda)$
   b. Substitusi nilai λ, suatu λ adalah nilai eigen A jika dan hanya jika $C_A(\lambda) \in Z(R)$.
   c. Menentukan penyelesaian dari $NS(\lambda I_n - A)$, vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor-vektor taknol di dalam ruang solusi $(\lambda I - A)v = 0$.
2. Misalkan M adalah R-modul bebas dengan rank n, dan $\theta : M \to M$ suatu R-endomorfisma. Endomorfisma θ dapat didiagonalkan jika dan hanya jika $\cup_{\lambda \in R(\theta)} E(\lambda)$ memuat suatu basis bagi *M*.
3. Untuk menentukan suatu basis baru bagi suatu modul bebas dapat dikonstruksi dari vektor-vektor eigen dari suatu endomorfismanya, yakni endomorfisma yang dapat didiagonalkan.
   a. Menentukan matriks representasi dari endomorfisma modul bebas.
   b. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks representasi endomorfisma modul bebas.
   c. Melakukan diagonalisasi matriks representasi endomorfisma modul bebas dengan menggunakan vektor-vektor eigennya sebagai matriks pendiagonal.

d. Membentuk basis baru bagi suatu modul bebas yang terdiri dari vektor vektor eigen endomorfismanya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Gregorcic, Gregor, 2001. *The Singular Value Decomposition and the Pseudoinverse.* Department of Electrical Engineering. University College Cork.

[2] Brown, C.W., 1993. *Matrices Over Commutative Rings*. Marcel Dekker,Inc., New York

[3] Harianto, Joko, dkk., 2011. *Diagonalisasi Matriks Atas Ring Komutatif*. Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, Yogyakarta, 3 Desember 2011.

B18

ORIGINALITY REPORT

11%	11%	3%	0%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	jurnal.untan.ac.id Internet Source	6%
2	easychair.org Internet Source	3%
3	docplayer.info Internet Source	3%

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 3%
Exclude bibliography	On		