PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018

Tema

"Pengembangan Matematika dalam Meningkatkan Daya Saing Bangsa"

Malang, 24-26 Juli 2018

ISBN: 978-623-94020-0-6

Prosiding
Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018

dengan tema

"Pengembangan Matematika dalam Meningkatkan Daya Saing Bangsa"

Malang, 24-26 Juli 2018

Diterbitkan oleh

Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS) Perwakilan Surabaya

Diselenggarakan oleh

IndoMS

Jurusan Matematika Universitas Brawijaya

ISBN: 978-623-94020-0-6

Ukuran: 29,7 cm × 21 cm

Juli 2020

TIM REVIEWER DAN EDITOR

Prosiding

Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018

dengan tema

“Pengembangan Matematika dalam Meningkatkan Daya Saing Bangsa”

TIM REVIEWER

Nur Shofianah, S.Si.,M.Si.,Ph.D.
Dra. Trisilowati, M.Sc.,Ph.D.
Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
Ummu Habibah, S.Si., M.Si., Ph.D.
Rahma Fitriani, S.Si., M.Sc., Ph.D.
Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.
Dr. Umu Sa’adah, M.Si.
Syaiful Anam, S.Si., MT., Ph.D.

TIM EDITOR

Indah Yanti, S.Si., M.Si.
Nurjannah, S.Si., M.Sc., Ph.D.

Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS)
Perwakilan Surabaya

Alamat:

Departemen Matematika

Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Jl. Raya ITS, Keputih Sukolilo Surabaya

SUSUNAN PANITIA PELAKSANA
KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XIX-2018

Pelindung:
Rektor Universitas Brawijaya

Pembina:
Para Wakil Rektor Universitas Brawijaya

Penanggung Jawab:
Dekan FMIPA UB
Wakil Dekan I FMIPA UB
Wakil Dekan II FMIPA UB
Wakil Dekan III FMIPA UB

Panitia Pengarah:
Presiden IndoMS (Dr. Intan Muchtadi)
Sekretaris IndoMS (Sisilia Sylviani, M.Si.)
Bendahara IndoMS (Dr. Ikha Magdalena)
Dr. Abadi (Gubernur IndoMS Wilayah Jawa Timur)
Dr. Fatmawati (Sekretaris IndoMS Wilayah Jawa Timur)
Wakil Presiden I Bidang Organisasi dan Kerjasama IndoMS (Prof. Dr. Syafrizal Sy)
Wakil Presiden II Bidang Penelitian dan Publikasi IndoMS (Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.)
Wakil Presiden III Bidang Pendidikan dan Pengembangan IndoMS (Prof. Dr. St. Budi Waluya)
Ketua Jurusan Matematika UB (Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.)

Penasehat:
Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes.
Prof. Dr. Ir. Loekito Adi Soehono, M.Agr.
Prof. Dr. Ir. Waego Hadi Nugroho
Prof. Dr. Ir. Ni Wayan Surya Wardhani, MS.
Prof. Dr. Ir. Henny Pramoedyo, MS.
Dr. Ir. Maria Bernadetha Theresia Mitakda
Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
Prof. Dr. Marjono, M.Phil.

Panitia Pelaksana

Ketua Pelaksana	:	Syaiful Anam, S.Si, M.T., Ph.D.
Sekretaris	:	Indah Yanti, S.Si, M.Si.
		Luthfatul Amaliana, S.Si., M.Si.

Bendahara : Kwardiniya Andawaningtyas, S.Si., M.Si.
Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D.
Surakhman, S.AP., M.M.

Sie Kesekretariatan, Informasi dan Web

Koordinator

Darmanto, M.Si

Anggota

Dwi Mifta Mahanani, S.Si., M.Si.
Zuraidah Fitriah, S.Si., M.Si.
Mila Kurniawaty, S.Si., M.Si., Ph.D.
Agung Surya Mahendra, S.Si.
Riesky Ovta Hidayat, A.Md.
Widjianto

Sie Humas, Publikasi, Dokumentasi, dan Dana

Koordinator

Dr. Suci Astutik, S.Si., M.Si.

Anggota

Prof. Dr. Marjono, M.Phil.
Dr. Dra. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si.
Ir. Solimun, MS.
M. Muslikh, M.Si.
Dr. Ir. Atiek Iriany, MS.
Yogie Meru Kusuma, A.Md.
Karyadi Eka Putra, A.Md.
Tri Wahyu Basuki, S.E.
Djoema'ali, S.E.

Sie Ilmiah dan Prosiding

Koordinator

Nurjannah, S.Si, M.Sc, Ph.D.

Anggota

Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D.
Trisilowati, M.Sc., Ph.D.
Ummu Habibah, S.Si., M.Si., Ph.D.
Rahma Fitriani, S.Si., M.Sc., Ph.D.
Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.
Dr. Umu Sa'adah, M.Si.

Sie Acara dan Sidang

Koordinator

Dr. Noor Hidayat, M.Si.

Anggota

Dr. Ani Budi Astuti, M.Si.
Dr. Moch. Aruman Imron, M.Si.
Achmad Efendi, S.Si., M.Sc., Ph.D.
Dra. Endang Wahyu Handamari, M.Si.
Sa'adatul Fitri, S.Si., M.Sc.

Sie Konsumsi

Koordinator

Vira Hari Krisnawati, S.Si., M.Sc.

Anggota

Dra. Ari Andari, MS.
Ir. Heni Kusdarwati, MS.
Eni Sumarminingsih, S.Si., M.M.
Ririen Mujiastuti, S.E.
Pujiyanti, A.Md.
Muslikhah, S.E.

Sie Transportasi

Koordinator

Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc, Ph.D.

Anggota

Drs. Imam Nurhadi Purwanto, M.T.
Drs. Marsudi, MS.
Samingun Handoyo, S.Si., M.Cs.
Ir. Mudjiono, MM.
Drs. Bambang Sugandi, M.Si.
Sukarman, S.H.
Syaiful Bakri

Sie Perlengkapan

Koordinator

Moh. Amin, S.E.

Anggota

Dr. Sobri Abusini, M.T.
Dr. Adji Achmad Rinaldo Fernandes, S.Si., M.Sc.

Mai Firman
Sahroni
Hadi Wiyono
Mohammad Romadhoni, A.Md.
Misno
Agung Kurniawan
Hasan Muhajir, S.T.
Heru Setiawan
Nurul Yakin
Suliono

DAFTAR ISI

Submodul Prima, Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima Pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n)$.

I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[1], Ni Wayan Switrayni[1], and Qurratul Aini[1]
[1] Prodi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mataram, Indonesia
email: adhitya.wardhana@unram.ac.id; niwayan.switrayni@unram.ac.id; qurratulaini.aini@unram.ac.id
*penelitian ini dibiayai oleh dana PNBP Universitas Mataram 2018

Kata Kunci: submodul prima, submodul prima lemah, submodul hampir prima
Abstrak. Prime submodule is the abstraction to module theory of prime ideal in ring theory. A proper submodule N of an R-module M is called prime submodule if for all $r \in R$ and $m \in M$ such that $rm \in N$ implies $r \in (N:M)$ or $m \in N$. Prime submodule also generalized into weakly prime submodule and almost prime submodule. Wardhana and Astuti give characterization of prime submodule, weakly prime submodule and almost prime submodule in $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_n$ (2014). This study deal with particular cases of both of them in $\mathbb{Z}$-module $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n)$.

1 PENDAHULUAN

Abstraksi dari bilangan prima pertama kali dilakukan oleh Dedekind pada tahun 1871, Dedekind mengenalkan struktur aljabar ideal prima di Teori Gelanggang yang kemudian diikuti struktur aljabar submodul prima pada Teori Modul oleh Dauns pada tahun 1978 [1]. Struktur aljabar submodul prima kemudian diperlemah menjadi submodul prima lemah dan submodul hampir prima oleh Hadi dan Khashan [2,3]. Wardhana dan Astuti memberikan kakrakteristik submodul prima, submodul prima lemah dan hampir prima pada $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_n$[4]. Dalam artikel ini diberikan karakteristik submodul prima, submodul prima lemah dan hampir prima pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n)$.

Submodul prima, submodul prima lemah dan submodul hampir prima didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1 Misalkan N submodul sejati dari R-modul M dan $(N:M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$.

1. Submodul N dikatakan submodul prima jika untuk setiap $r \in R$ Rdan $m \in M$ dengan $rm \in N$ berakibat $r \in (N:M)$ atau $m \in N$.
2. Submodul N dikatakan submodul prima lemah jika untuk setiap $r \in R$ Rdan $m \in M$dengan $rm \in N - \{0\}$ berakibat $r \in (N:M)$ atau $m \in N$.
3. Submodul N dikatakan submodul hampir prima jika untuk setiap $r \in R$ Rdan $m \in M$dengan $rm \in N - (N:M)N$ berakibat $r \in (N:M)$ atau $m \in N$.

Dari definisi di atas mudah dilihat bahwa submodul prima pasti merupakan submodul prima lemah, dan submodul prima lemah pasti merupakan submodul hampir prima. Tapi tidak berlaku sebaliknya. Apabila diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{12}$, maka $\langle \bar{4} \rangle$ adalah submodul hampir prima yang bukan submodul prima lemah dan $\{\bar{0}\}$ adalah submodul prima lemah yang bukan submodul prima.

2 HASIL DAN PEMBAHASAN

Wardhana dkk memberikan karakteristik submodul prima, submodul prima lemah dan hampir prima pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$ dengan melakukan dekomposisi siklik pada modulnya terlebih dahulu. Metode yang sama akan dilakukan pada artikel ini. Karakteristik akan diberikan dalam dua kasus, kasus pertama saat order dari modul adalah pangkat prima, dan kasus kedua saat ordernya bukan pangkat prima.

Modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n)$ dapat didekomposisi menjadi submodul-submodul siklik [6]. Dekomposisi siklik dari modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n)$ adalah $\oplus_{i=1}^{2} \oplus_{j=1}^{2} \langle E_{ij} \rangle$ dengan E_{ij} adalah matriks unit, yakni matriks yang elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah $\bar{1}$ dan $\bar{0}$ untuk elemen lainnya.

Teorema 1 Misalkan modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n)$ memiliki dekomposisi siklik $\langle E_{11} \rangle \oplus \langle E_{12} \rangle \oplus \langle E_{21} \rangle \oplus \langle E_{22} \rangle$, maka $\langle E_{ij} \rangle \approx \mathbb{Z}_n$ untuk semua $i,j \in \{1,2\}$.

Bukti

Misalkan $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n) = \oplus_{i=1}^{2} \oplus_{j=1}^{2} \langle E_{ij} \rangle$. Ambil $i,j \in \{1,2\}$ sebarang, tanpa mengurangi perumuman, misalkan $i = 1, j = 1$. Buat pengaitan $\partial: \langle E_{11} \rangle \to \mathbb{Z}_n$ dengan definisi $\partial\left(\begin{bmatrix} \bar{k} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \bar{k}$, dimana $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$. Apabila $\begin{bmatrix} \overline{k_1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{k_2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \langle E_{11} \rangle$ dengan $\begin{bmatrix} \overline{k_1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{k_2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$, kita peroleh $\overline{k_1} = \overline{k_2}$. Akibatnya $\partial\left(\begin{bmatrix} \overline{k_1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \partial\left(\begin{bmatrix} \overline{k_2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right)$, sehingga ∂ adalah suatu pemetaan. Kemudian apabila $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$, mudah dilihat bahwa $\partial\left(\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \bar{x}$, akibatnya ∂ suatu pemetaan yang bersifat pada. Terakhir, jika diberikan $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \langle E_{11} \rangle$ dimana $\partial\left(\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \partial\left(\begin{bmatrix} \bar{y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right)$, diperoleh $\bar{x} = \bar{y}$. Akibatnya $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$, sehingga ∂ suatu pemetaan yang bersifat satu-satu. Jadi ∂ suatu isomorfisma, akibatnya $\langle E_{ij} \rangle \approx \mathbb{Z}_n$ ■

Berdasarkan Teorema 1, karakteristik submodul prima, submodul prima lemah dan submodul hampir prima dari $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n)$ cukup diperoleh dari karakteristik tiap suku-suku langsungnya. Teorema 1 berakibat hal berikut.

Akibat 1 Misalkan diberikan modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n)$, maka $M_{2x2}(\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$.

Karakteristik dari submodul prima, submodul prima lemah dan submodul hampir prima dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_n$diberikan pada teorema berikut

Teorema 2 [4] Misalkan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}...p_m^{k_m}$ dimana p_i bilangan prima dan $k_i \in \mathbb{N}$.

1. Submodul tak nol N adalah submodul prima jika dan hanya jika $N =< \overline{p_i} >$ untuk suatu $i \in \{1, 2, ..., m\}$.
2. Submodul N adalah submodul prima lemah jika dan hanya jika $N =< \overline{p_i} >$ untuk suatu $i \in \{1, 2, ..., m\}$ atau $N = \{\overline{0}\}$.
3. Submodul N merupakan submodul hampir prima dari $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika $N = \{\overline{0}\}$ atau $N =< \overline{p_i} >$ untuk suatu $i \in \{1, 2, ..., m\}$ atau $N =< \overline{p_i^{k_i}} >$ untuk $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Untuk memanfaatkan Teorema 2 pada artikel ini, akan digunakan sifat yang telah diperoleh pada artikel sebelumnya.

Teorema 3 [4] Misalkan diberikan $\mathbb{Z}$-modul M dengan S adalah submodulnya. Apabila

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$$

dan

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus ... S_n$$

dengan $S_i \subseteq M_i$ untuk $i = 1,2,...,n$, maka diperoleh

$$(S:M) = \bigcap_{i=1}^{n} (S_i:M_i)$$

Teorema 3 mengatakan bahwa fraksi submodul dari suatu modul sama dengan irisan semua fraksi suku langsung dari dekomposisinya.

Apabila diberikan $\mathbb{Z}$-modul M dengan K,L adalah submodul dari M dimana $M = K \oplus L$. Apabila K_S dan L_S berturut-turut adalah submodul hampir prima dari K dan L. Submodul $K_S \oplus L_s$ belum tentu merupakan submodul hampir prima.

Contoh, bila diberikan $\mathbb{Z}$-modul $M = \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_4$ dengan $\langle \bar{3} \rangle$ dan $\langle \bar{2} \rangle$ adalah berturut-turut adalah submodul hampir prima dari $\mathbb{Z}_6$ dan $\mathbb{Z}_4$ maka didapatkan $(\langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle{:}M) = 6Z$. Dengan memilih $r = 3 \notin 6Z$ dan $m = \bar{1} \oplus \bar{2} \notin \langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle$ diperoleh $rm \in \langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle - (\langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle{:}M)\langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle$ yang menunjukkan $\langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle$ bukan submodul hampir prima.

Submodul $K_S \oplus L_s$ dipastikan adalah submodul hampir prima apabila memenuhi suatu kondisi berikut.

Teorema 4 [4] Misalkan diberikan $\mathbb{Z}$-modul M dengan K,L adalah submodul hampir prima dari M dimana $M = K \oplus L$. Apabila K_S dan L_S berturut-turut adalah submodul hampir prima tak nol dari K dan L, maka $K_S \oplus L_s$ adalah submodul hampir prima jika dan hanya jika $(K_S{:}M) = (L_s{:}\mathrm{M})$.

Berdasarkan Teorema 4 dan fakta bahwa submodul hampir prima adalah submodul *stacked* [4], diperoleh karakteristik dari submodul hampir prima sebagai berikut.

Teorema 5 Misalkan diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{Z}_\mathrm{n})$. Misalkan juga $\mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{Z}_\mathrm{n}) = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$. Submodul tak nol N adalah submodul hampir prima dari M jika dan hanya jika submodul N berbentuk $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$ dengan N_i adalah submodul hanpir prima dari M_i untuk $i = 1,2,3,4$ atau $N_i = M_i$, yang apabila N_i,N_j adalah submodul tak trivial, i,$j \in \{1,2,3,4\}$, maka $(N_i{:}M_i) = \left(N_j{:}M_j\right)$.

Bukti

Misalkan berlaku. jika submodul N berbentuk $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$ dengan N_i adalah submodul dari M_i untuk $i = 1,2,3,4$ yang apabila N_i,N_j adalah submodul tak trivial, i,$j \in \{1,2,3,4\}$, maka $(N_i{:}M_i) = \left(N_j{:}M_j\right) = \langle p \rangle, p \in Z$. Kasus pertama, apabila terdapat k,l $\in \{1,2,3,4\}$ sehingga N_k,N_l adalah submodul hampir prima tak trivial, berdasarkan Teorema 3 diperoleh $(N{:}M) = \langle p \rangle$. Ambil sebarang $r \in Z$ dan $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \in M$ dengan $rm \in N - (N{:}M)N$. Akibatnya $rm_i \in N_i - (N_i{:}M_i)N_i$. Untuk $i = k$,l maka jelas $r \in (N_i{:}M_i)$ atau $m_i \in N_i$. Sehingga diperoleh $r \in (N{:}M)$ atau $m \in N$, oleh karena itu diperoleh N pasti submodul hampir prima.

Sebaliknya, misalkan N submodul hampir prima, jadi N pasti *stacked*, maka $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$. Apabila $N_i = 0$ atau $N_i = M_i$ untuk semua $i = 1,2,3,4$, maka jelas N submodul hampir prima. Misalkan terdapat $i \in \{1,2,3,4\}$ dengan N_i adalah submodul tak trivial, akan ditunjukkan N_i adalah submodul hampir prima. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $i = 1$. Andaikan N_1 bukan submodul hampir prima, maka terdapat $r \notin (N_1{:}M_1)$ dan $m \notin N_1$ sehingga $rm \in N_1$. Akibatnya $r(m + m_2 + m_3 + m_4) \in N$ untuk suatu $m_2 \in M_2, m_3 \in M_3$,$m_4 \in M_4$ dengan $r \notin (N{:}M)$ dan $m + m_2 + m_3 + m_4 \notin N$ (Kontradiksi). Jadi haruslah N_i submodul hampir prima. Lebih jauh, apabila terdapat k,$l \in \{1,2,3,4\}$ sehingga N_k,N_l submodul hampir prima yang tak trivial, akan ditunjukkan $(N_k{:}M_k) = (N_l{:}M_l)$. Andaikan $(N_k{:}M_k) = \langle p \rangle \neq \langle q \rangle = (N_l{:}M_l)$, tanpa mengurangi perumuman, misalkan $k = 1$ 1dan $l = 2$. Pilih $r = p \notin (N{:}M)$ dan $m = E_{11} + qE_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} \notin N$, didapatkan $rm \in N - (N{:}M)N$, hal ini kontradiksi dengan N submodul hampir prima. Akibatnya haruslah $(N_k{:}M_k) = (N_l{:}M_l)$. ■

Berdasarkan bukti pada Teorema 5, dengan mudah bisa didapatkan karakteristik submodul prima lemah dan submodul prima. Hal itu ditulis dalam sifat berikut.

Akibat 2 Misalkan diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{Z}_\mathrm{n})$. Misalkan juga $\mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{Z}_\mathrm{n}) = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$ dengan M_i adalah matriks unit untuk semua $i = 1,2,3,4$. Submodul N adalah submodul prima dari M jika dan hanya jika submodul N berbentuk $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$ dengan N_i adalah submodul prima dari M_i untuk $i = 1,2,3,4$ yang apabila N_i,N_j adalah submodul tak trivial, i,$j \in \{1,2,3,4\}$, maka $(N_i{:}M_i) = \left(N_j{:}M_j\right)$.

Akibat 3 Misalkan diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathrm{M}_{2\mathrm{x}2}(\mathbb{Z}_\mathrm{n})$. Misalkan juga $\mathrm{M}_{2\mathrm{x}2}(\mathbb{Z}_\mathrm{n}) = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$ dengan M_i adalah matriks unit untuk semua $i = 1,2,3,4$. Submodul N adalah submodul prima lemah dari M jika dan hanya jika submodul N berbentuk $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$ dengan N_i adalah submodul prima lemah dari M_i untuk $i = 1,2,3,4$ yang apabila N_i,N_j adalah submodul tak trivial, $i,j \in \{1,2,3,4\}$, maka $(N_i{:}M_i) = \left(N_j{:}M_j\right)$.

Dari tiga sifat di atas maka dengan mudah mengidentifikasi submodul prima, submodul prima lemah dan submodul hampir prima.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dauns, J., *Modules and Rings*. Cambridge University Press, New, 1994.

[2] Hadi, M,A., *On Weakly Prime Submodules*, Ibn Al-Haitham Journal For Pure and Applied Science, 22 (3), 2009.

[3] Khashan, Hani A., *On Almost Prime Submodules*, Acta Mathematica Scientia, 32B (2), 645-651, 2012.

[4] Wardhana, I. G. A. W. and Astuti, P., *Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima Pada Modul $\mathbb{Z}_n$ Atas Gelanggang $\mathbb{Z}$*, Jurnal Mathematika dan Sains (JMS) ITB, 19(1), 2014.

[5] Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., Aini, Q., *Submodul Prima, Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima Pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$*, Eigen Mathematics Journal, 1(1), 2018.

[6] Roman, S., *Advance Linier Algebra, in : Graduated Text In Mathematics vol. 135*. Springer, New York, 2007.