



# PROSIDING

## Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018

Tema

“Pengembangan Matematika dalam  
Meningkatkan Daya Saing Bangsa”

Malang, 24-26 Juli 2018

ISBN: 978-623-94020-0-6

**Prosiding**  
**Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018**

dengan tema  
“**Pengembangan Matematika dalam Meningkatkan Daya Saing Bangsa**”

**Malang, 24-26 Juli 2018**

Diterbitkan oleh  
**Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS)**  
**Perwakilan Surabaya**

Diselenggarakan oleh



**IndoMS**



**Jurusan Matematika**  
**Universitas Brawijaya**

ISBN: 978-623-94020-0-6

@ Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

Ukuran: 29,7 cm × 21 cm

Juli 2020

# **TIM REVIEWER DAN EDITOR**

**Prosiding**

**Konferensi Nasional Matematika (KNM) XIX-2018**

dengan tema

**“Pengembangan Matematika dalam Meningkatkan Daya Saing Bangsa”**

## **TIM REVIEWER**

Nur Shofianah, S.Si.,M.Si.,Ph.D.

Dra. Trisilowati, M.Sc.,Ph.D.

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.

Ummu Habibah, S.Si., M.Si., Ph.D.

Rahma Fitriani, S.Si., M.Sc., Ph.D.

Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.

Dr. Umu Sa’adah, M.Si.

Syaiful Anam, S.Si., MT., Ph.D.

## **TIM EDITOR**

Indah Yanti, S.Si., M.Si.

Nurjannah, S.Si., M.Sc., Ph.D.

**Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS)  
Perwakilan Surabaya**

**Alamat:**

**Departemen Matematika**

**Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains data**

**Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

**Jl. Raya ITS, Keputih Sukolilo Surabaya**

# **SUSUNAN PANITIA PELAKSANA KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XIX-2018**

## **Pelindung:**

Rektor Universitas Brawijaya

## **Pembina:**

Para Wakil Rektor Universitas Brawijaya

## **Penanggung Jawab:**

Dekan FMIPA UB

Wakil Dekan I FMIPA UB

Wakil Dekan II FMIPA UB

Wakil Dekan III FMIPA UB

## **Panitia Pengarah:**

Presiden IndoMS (Dr. Intan Muchtadi)

Sekretaris IndoMS (Sisilia Sylviani, M.Si.)

Bendahara IndoMS (Dr. Ikha Magdalena)

Dr. Abadi (Gubernur IndoMS Wilayah Jawa Timur)

Dr. Fatmawati (Sekretaris IndoMS Wilayah Jawa Timur)

Wakil Presiden I Bidang Organisasi dan Kerjasama IndoMS (Prof. Dr. Syafrizal Sy)

Wakil Presiden II Bidang Penelitian dan Publikasi IndoMS (Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.)

Wakil Presiden III Bidang Pendidikan dan Pengembangan IndoMS (Prof. Dr. St. Budi Waluya)

Ketua Jurusan Matematika UB (Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.)

## **Penasehat:**

Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes.

Prof. Dr. Ir. Loekito Adi Soehono, M.Agr.

Prof. Dr. Ir. Waego Hadi Nugroho

Prof. Dr. Ir. Ni Wayan Surya Wardhani, MS.

Prof. Dr. Ir. Henny Pramoedyo, MS.

Dr. Ir. Maria Bernadetha Theresia Mitakda

Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.

Prof. Dr. Marjono, M.Phil.

## **Panitia Pelaksana**

Ketua Pelaksana : Syaiful Anam, S.Si, M.T., Ph.D.

Sekretaris : Indah Yanti, S.Si, M.Si.

Luthfatul Amaliana, S.Si., M.Si.

Bendahara : Kwardiniya Andawaningtyas, S.Si., M.Si.  
Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D.  
Surakhman, S.AP., M.M.

### **Sie Kesekretariatan, Informasi dan Web**

#### **Koordinator**

Darmanto, M.Si

#### **Anggota**

Dwi Mifta Mahanani, S.Si., M.Si.  
Zuraidah Fitriah, S.Si., M.Si.  
Mila Kurniawaty, S.Si., M.Si., Ph.D.  
Agung Surya Mahendra, S.Si.  
Riesky Ovta Hidayat, A.Md.  
Widjianto

### **Sie Humas, Publikasi, Dokumentasi, dan Dana**

#### **Koordinator**

Dr. Suci Astutik, S.Si., M.Si.

#### **Anggota**

Prof. Dr. Marjono, M.Phil.  
Dr. Dra. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si.  
Ir. Solimun, MS.  
M. Muslikh, M.Si.  
Dr. Ir. Atiek Iriany, MS.  
Yogie Meru Kusuma, A.Md.  
Karyadi Eka Putra, A.Md.  
Tri Wahyu Basuki, S.E.  
Djoema'ali, S.E.

### **Sie Ilmiah dan Prosiding**

#### **Koordinator**

Nurjannah, S.Si, M.Sc, Ph.D.

#### **Anggota**

Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D.  
Trisilowati, M.Sc., Ph.D.  
Ummu Habibah, S.Si., M.Si., Ph.D.  
Rahma Fitriani, S.Si., M.Sc., Ph.D.  
Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.  
Dr. Umu Sa'adah, M.Si.

## **Sie Acara dan Sidang**

### **Koordinator**

Dr. Noor Hidayat, M.Si.

### **Anggota**

Dr. Ani Budi Astuti, M.Si.

Dr. Moch. Aruman Imron, M.Si.

Achmad Efendi, S.Si., M.Sc., Ph.D.

Dra. Endang Wahyu Handamari, M.Si.

Sa'adatul Fitri, S.Si., M.Sc.

## **Sie Konsumsi**

### **Koordinator**

Vira Hari Krisnawati, S.Si., M.Sc.

### **Anggota**

Dra. Ari Andari, MS.

Ir. Heni Kusdarwati, MS.

Eni Sumarminingsih, S.Si., M.M.

Ririen Mujiastuti, S.E.

Pujiyanti, A.Md.

Muslikhah, S.E.

## **Sie Transportasi**

### **Koordinator**

Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc, Ph.D.

### **Anggota**

Drs. Imam Nurhadi Purwanto, M.T.

Drs. Marsudi, MS.

Samingun Handoyo, S.Si., M.Cs.

Ir. Mudjiono, MM.

Drs. Bambang Sugandi, M.Si.

Sukarman, S.H.

Syaiful Bakri

## **Sie Perlengkapan**

### **Koordinator**

Moh. Amin, S.E.

### **Anggota**

Dr. Sobri Abusini, M.T.

Dr. Adji Achmad Rinaldo Fernandes, S.Si., M.Sc.

Mai Firman  
Sahroni  
Hadi Wiyono  
Mohammad Romadhoni, A.Md.  
Misno  
Agung Kurniawan  
Hasan Muhajir, S.T.  
Heru Setiawan  
Nurul Yakin  
Suliono

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>TIM REVIEWER DAN EDITOR</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>SUSUNAN PANITIA PELAKSANA KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XIX-2018</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>ALJABAR</b> . . . . .	<b>1</b>
ANALISIS ENDOMORFISMA MODUL BEBAS	
Ikbal Fathul Haditia <sup>1</sup> , Ni Wayan Switrayni, Qurratul Aini, I Gede Adhitya Wis- nu Wardhana . . . . .	3
COLLISION ATTACK PADA SKEMA LIN ET AL.	
Zefriani Erza Dwita dan Susila Windarta . . . . .	9
DEKOMPOSISI MODUL PROJEKTIF YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS GELANGGANG PEMBAGI ELEMENTER	
Eka Wulan R., Fransiskus Fran, Helmi . . . . .	15
DESKRIPSI SPEKTRUM MODUL BEBAS ATAS DAERAH IDEAL UTAMA YANG DIBANGUN SECARA HINGGA TERHADAP SUATU BASIS YANG DIBE- RIKAN	
Rani S. Tarmidi, Afif Humam, Pudji Astuti . . . . .	21
GRAF IDENTITAS DARI GRUP DIHEDRAL	
Ahmad Muhammad Muftirridha, Noor Hidayat . . . . .	27
GRUP INVERSE TERKAIT MATRIKS LESLIE YANG STOKASTIK	
Teduh Wulandari Mas' oed, Agah D. Garnadi . . . . .	33
HUBUNGAN ANTARA ORDER KRULL DAN ORDER ASANO	
Mu'amar Musa Nurwigantara dan Indah Emilia Wijayanti . . . . .	41
MODUL TANPA TORSI	
Valentino Risali dan Indah Emilia Wijayanti . . . . .	47
RG-KOMODUL BERSIH	
Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, dan Budi Surodjo . . . . .	53
SIFAT IRISAN RADIKAL JACOBSON	
Puguh Wahyu Prasetyo . . . . .	59
SIFAT-SIFAT MODUL $\mathcal{W}$ -BEBAS	
Fitriani, Indah Emilia Wijayanti dan Budi Surodjo . . . . .	65
SOLUSI PRIMITIF PERSAMAAN DIOPHANTINE $x^2 + 9y^2 = z^2$	
Shinta Irabyatul Rahman dan Noor Hidayat . . . . .	71
STRUKTUR EIGEN PADA MATRIKS SISTEM MODEL GERAKAN BERJALAN ATAS ALJABAR MAKS-PLUS	
Lidya Christina Sugiarto, Siswanto, dan Sutanto . . . . .	77



SUBMODUL PRIMA, SUBMODUL PRIMA LEMAH DAN SUBMODUL HAM- PIR PRIMA PADA $\mathbb{Z}$ -MODUL $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$	
I Gede Adhitya Wisnu Wardhana, Ni Wayan Switrayni, dan Qurratul Aini . . . .	85
<b>ANALISIS DAN GEOMETRI . . . . .</b>	<b>91</b>
MULTIPLE KOSNITA MENGGUNAKAN CENTROID MELALUI EXCENTER	
Pujiati dan Mashadi . . . . .	92
PEMILIHAN NILAI PARAMETER C PADA INTERPOLAN GAUSSIAN	
Elin Herlinawati . . . . .	99
PENERAPAN TEOREMA SABUWALA-LEON DALAM MENENTUKAN SOLU- SI PARTIKULIR PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER-CAUCHY	
Mariatul Kiftiah, Yudhi, dan Woro Budiartini Partiw . . . . .	105
SIFAT-SIFAT DASAR RELASI LINIER PADA RUANG HILBERT	
Susilo Hariyanto, YD. Sumanto, Solikhin dan Abdul Azis . . . . .	111
SIFAT-SIFAT PADA MATRIKS INTERVAL FUZZY	
Mashadi dan Abdul Hadi . . . . .	117
TEOREMA TITIK TETAP DENGAN PEMETAAN C-KONTRAKTIF YANG DI- PERLEMAH PADA RUANG METRIK DIPERUMUM LENGKAP	
Rahmat Prasetyadi Widyasmara Nurhadi dan Imam Supeno . . . . .	124
<b>KOMBINATORIK . . . . .</b>	<b>129</b>
DEKOMPOSISI $S_q^2$ -(ANTI)AJAIB DARI GRAF <i>GENERALIZED PETERSEN</i>	
Aula Nur Mudholifah, Hendy, Nisa Ayunda, Kusuma Wardhani Mas'udah dan Ana Rahmawati . . . . .	131
HIMPUNAN PEMBEDA TANPA TITIK TERISOLASI DARI HASIL KALI CAR- TESIUS GRAF TERTENTU DENGAN SEBUAH LINTASAN	
Ismail Mulia Hasibuan, A. N. M. Salman, dan Suhadi Wido Saputro . . . . .	139
KARAKTERISASI DIMENSI METRIK CAMPURAN GRAF AMALGAMASI LING- KARAN	
Hazrul Iswadi . . . . .	145
KEKUATAN TAK REGULER SISI TOTAL PADA GRAF BUKU DOBEL UNTUK BEBERAPA TIPE	
Lucia Ratnasari, Sri Wahyuni, Yeni Susanti dan Diah Junia E.P. . . . .	151
PELABELAN ANTI AJAIB JARAK PADA SUATU GRAF PETERSEN DIPERU- MUM	
Dian Eka Wijayanti . . . . .	157
PELABELAN HARMONIS GRAF TANGGA SEGITIGA GANDA $LG_n$	
Kurniawan Atmadja dan Kiki A. Sugeng . . . . .	163
PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BER- ORDE LIMA TANPA LOOP DENGAN BANYAKNYA GARIS 3-PARALEL ADALAH ENAM	
Amanto1, M. F. N Efendi, dan Wamiliana . . . . .	169

## Submodul Prima, Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima Pada $\mathbb{Z}$ -modul $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$ .

I Gede Adhitya Wisnu Wardhana<sup>1</sup>, Ni Wayan Switrayni<sup>1</sup>, and Qurratul Aini<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Prodi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mataram, Indonesia  
email: [adhitya.wardhana@unram.ac.id](mailto:adhitya.wardhana@unram.ac.id); [niwayan.switrayni@unram.ac.id](mailto:niwayan.switrayni@unram.ac.id);  
[qurratulaini.aini@unram.ac.id](mailto:qurratulaini.aini@unram.ac.id)

\*penelitian ini dibiayai oleh dana PNBPN Universitas Mataram 2018

**Kata Kunci:** submodul prima, submodul prima lemah, submodul hampir prima

**Abstrak.** Prime submodule is the abstraction to module theory of prime ideal in ring theory.

A proper submodule  $N$  of an  $R$ -module  $M$  is called prime submodule if for all  $r \in R$  and  $m \in M$  such that  $rm \in N$  implies  $r \in (N:M)$  or  $m \in N$ . Prime submodule also generalized into weakly prime submodule and almost prime submodule. Wardhana and Astuti give characterization of prime submodule, weakly prime submodule and almost prime submodule in  $\mathbb{Z}$ -modul  $\mathbb{Z}_n$  (2014). This study deal with particular cases of both of them in  $\mathbb{Z}$ -module  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$ .

## 1 PENDAHULUAN

Abstraksi dari bilangan prima pertama kali dilakukan oleh Dedekind pada tahun 1871, Dedekind mengenalkan struktur aljabar ideal prima di Teori Gelanggang yang kemudian diikuti struktur aljabar submodul prima pada Teori Modul oleh Dauns pada tahun 1978 [1]. Struktur aljabar submodul prima kemudian diperlemah menjadi submodul prima lemah dan submodul hampir prima oleh Hadi dan Khashan [2,3]. Wardhana dan Astuti memberikan kakarakteristik submodul prima, submodul prima lemah dan hampir prima pada  $\mathbb{Z}$ -modul  $\mathbb{Z}_n$ [4]. Dalam artikel ini diberikan karakteristik submodul prima, submodul prima lemah dan hampir prima pada  $\mathbb{Z}$ -modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$ .

Submodul prima, submodul prima lemah dan submodul hampir prima didefinisikan sebagai berikut

**Definisi 1** Misalkan  $N$  submodul sejati dari  $R$ -modul  $M$  dan  $(N:M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$ .

1. Submodul  $N$  dikatakan submodul prima jika untuk setiap  $r \in R$  dan  $m \in M$  dengan  $rm \in N$  berakibat  $r \in (N:M)$  atau  $m \in N$ .
2. Submodul  $N$  dikatakan submodul prima lemah jika untuk setiap  $r \in R$  dan  $m \in M$  dengan  $rm \in N - \{0\}$  berakibat  $r \in (N:M)$  atau  $m \in N$ .
3. Submodul  $N$  dikatakan submodul hampir prima jika untuk setiap  $r \in R$  dan  $m \in M$  dengan  $rm \in N - (N:M)N$  berakibat  $r \in (N:M)$  atau  $m \in N$ .

Dari definisi di atas mudah dilihat bahwa submodul prima pasti merupakan submodul prima lemah, dan submodul prima lemah pasti merupakan submodul hampir prima. Tapi tidak berlaku sebaliknya. Apabila diberikan  $\mathbb{Z}$ -modul  $\mathbb{Z}_{12}$ , maka  $\langle \bar{4} \rangle$  adalah submodul hampir prima yang bukan submodul prima lemah dan  $\langle \bar{0} \rangle$  adalah submodul prima lemah yang bukan submodul prima.

## 2 HASIL DAN PEMBAHASAN

Wardhana dkk memberikan karakteristik submodul prima, submodul prima lemah dan hampir prima pada  $\mathbb{Z}$ -modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_9)$  dengan melakukan dekomposisi siklik pada modulnya terlebih dahulu. Metode yang sama akan dilakukan pada artikel ini. Karakteristik akan diberikan dalam dua kasus, kasus pertama saat order dari modul adalah pangkat prima, dan kasus kedua saat ordernya bukan pangkat prima.

Modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$  dapat didekomposisi menjadi submodul-submodul siklik [6]. Dekomposisi siklik dari modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$  adalah  $\bigoplus_{i=1}^2 \bigoplus_{j=1}^2 \langle E_{ij} \rangle$  dengan  $E_{ij}$  adalah matriks unit, yakni matriks yang elemen pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  adalah  $\bar{1}$  dan  $\bar{0}$  untuk elemen lainnya.

**Teorema 1** Misalkan modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$  memiliki dekomposisi siklik  $\langle E_{11} \rangle \oplus \langle E_{12} \rangle \oplus \langle E_{21} \rangle \oplus \langle E_{22} \rangle$ , maka  $\langle E_{ij} \rangle \approx \mathbb{Z}_n$  untuk semua  $i, j \in \{1, 2\}$ .

**Bukti**

Misalkan  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n) = \bigoplus_{i=1}^2 \bigoplus_{j=1}^2 \langle E_{ij} \rangle$ . Ambil  $i, j \in \{1, 2\}$  sebarang, tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $i = 1, j = 1$ . Buat pengaitan  $\partial: \langle E_{11} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_n$  dengan definisi  $\partial \left( \begin{bmatrix} \bar{k} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right) = \bar{k}$ , dimana  $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$ . Apabila  $\begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{k}_2 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \langle E_{11} \rangle$  dengan  $\begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_2 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ , kita peroleh  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$ . Akibatnya  $\partial \left( \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right) = \partial \left( \begin{bmatrix} \bar{k}_2 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right)$ , sehingga  $\partial$  adalah

suatu pemetaan. Kemudian apabila  $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ , mudah dilihat bahwa  $\partial \left( \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right) = \bar{x}$ , akibatnya  $\partial$  suatu pemetaan yang bersifat pada. Terakhir, jika diberikan  $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \langle E_{11} \rangle$  dimana  $\partial \left( \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right) = \partial \left( \begin{bmatrix} \bar{y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right)$ , diperoleh  $\bar{x} = \bar{y}$ . Akibatnya  $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ , sehingga  $\partial$  suatu pemetaan yang bersifat satu-satu. Jadi  $\partial$  suatu isomorfisma, akibatnya  $\langle E_{ij} \rangle \approx \mathbb{Z}_n$  ■

Berdasarkan Teorema 1, karakteristik submodul prima, submodul prima lemah dan submodul hampir prima dari  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$  cukup diperoleh dari karakteristik tiap suku-suku langsungnya. Teorema 1 berakibat hal berikut.

**Akibat 1** Misalkan diberikan modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$ , maka  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$ .

Karakteristik dari submodul prima, submodul prima lemah dan submodul hampir prima dari  $\mathbb{Z}$ -modul  $\mathbb{Z}_n$  diberikan pada teorema berikut

**Teorema 2 [4]** Misalkan  $\mathbb{Z}$ -modul  $\mathbb{Z}_n$  dengan  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$  dimana  $p_i$  bilangan prima dan  $k_i \in \mathbb{N}$ .

1. Submodul tak nol  $N$  adalah submodul prima jika dan hanya jika  $N = \langle \bar{p}_i \rangle$  untuk suatu  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .
2. Submodul  $N$  adalah submodul prima lemah jika dan hanya jika  $N = \langle \bar{p}_i \rangle$  untuk suatu  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  atau  $N = \{\bar{0}\}$ .
3. Submodul  $N$  merupakan submodul hampir prima dari  $\mathbb{Z}_n$  jika dan hanya jika  $N = \{\bar{0}\}$  atau  $N = \langle \bar{p}_i \rangle$  untuk suatu  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  atau  $N = \langle \bar{p}_i^{k_i} \rangle$  untuk  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Untuk memanfaatkan Teorema 2 pada artikel ini, akan digunakan sifat yang telah diperoleh pada artikel sebelumnya.

**Teorema 3 [4]** Misalkan diberikan  $\mathbb{Z}$ -modul  $M$  dengan  $S$  adalah submodulnya. Apabila

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

dan

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_n$$

dengan  $S_i \subseteq M_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ , maka diperoleh

$$(S:M) = \bigcap_{i=1}^n (S_i:M_i)$$

Teorema 3 mengatakan bahwa fraksi submodul dari suatu modul sama dengan irisan semua fraksi suku langsung dari dekomposisinya.

Apabila diberikan  $\mathbb{Z}$ -modul  $M$  dengan  $K, L$  adalah submodul dari  $M$  dimana  $M = K \oplus L$ . Apabila  $K_S$  dan  $L_S$  berturut-turut adalah submodul hampir prima dari  $K$  dan  $L$ . Submodul  $K_S \oplus L_S$  belum tentu merupakan submodul hampir prima.

Contoh, bila diberikan  $\mathbb{Z}$ -modul  $M = \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_4$  dengan  $\langle \bar{3} \rangle$  dan  $\langle \bar{2} \rangle$  adalah berturut-turut adalah submodul hampir prima dari  $\mathbb{Z}_6$  dan  $\mathbb{Z}_4$  maka didapatkan  $(\langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle : M) = 6Z$ . Dengan memilih  $r = 3 \notin 6Z$  dan  $m = \bar{1} \oplus \bar{2} \notin \langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle$  diperoleh  $rm \in \langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle - (\langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle : M) \langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle$  yang menunjukkan  $\langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle$  bukan submodul hampir prima.

Submodul  $K_S \oplus L_S$  dipastikan adalah submodul hampir prima apabila memenuhi suatu kondisi berikut.

**Teorema 4 [4]** Misalkan diberikan  $\mathbb{Z}$ -modul  $M$  dengan  $K, L$  adalah submodul hampir prima dari  $M$  dimana  $M = K \oplus L$ . Apabila  $K_S$  dan  $L_S$  berturut-turut adalah submodul hampir prima tak nol dari  $K$  dan  $L$ , maka  $K_S \oplus L_S$  adalah submodul hampir prima jika dan hanya jika  $(K_S:M) = (L_S:M)$ .

Berdasarkan Teorema 4 dan fakta bahwa submodul hampir prima adalah submodul *stacked* [4], diperoleh karakteristik dari submodul hampir prima sebagai berikut.

**Teorema 5** Misalkan diberikan  $\mathbb{Z}$ -modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$ . Misalkan juga  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n) = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$ . Submodul tak nol  $N$  adalah submodul hampir prima dari  $M$  jika dan hanya jika submodul  $N$  berbentuk  $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$  dengan  $N_i$  adalah submodul hampir prima dari  $M_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, 4$  atau  $N_i = M_i$ , yang apabila  $N_i, N_j$  adalah submodul tak trivial,  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , maka  $(N_i:M_i) = (N_j:M_j)$ .

**Bukti**

Misalkan berlaku. jika submodul  $N$  berbentuk  $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$  dengan  $N_i$  adalah submodul dari  $M_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, 4$  yang apabila  $N_i, N_j$  adalah submodul tak trivial,  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , maka  $(N_i:M_i) = (N_j:M_j) = \langle p \rangle, p \in \mathbb{Z}$ . Kasus pertama, apabila terdapat  $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$  sehingga  $N_k, N_l$  adalah submodul hampir prima tak trivial, berdasarkan Teorema 3 diperoleh  $(N:M) = \langle p \rangle$ . Ambil sebarang  $r \in \mathbb{Z}$  dan  $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \in M$  dengan  $rm \in N - (N:M)N$ . Akibatnya  $rm_i \in N_i - (N_i:M_i)N_i$ . Untuk  $i = k, l$  maka jelas  $r \in (N_i:M_i)$  atau  $m_i \in N_i$ . Sehingga diperoleh  $r \in (N:M)$  atau  $m \in N$ , oleh karena itu diperoleh  $N$  pasti submodul hampir prima.

Sebaliknya, misalkan  $N$  submodul hampir prima, jadi  $N$  pasti *stacked*, maka  $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$ . Apabila  $N_i = 0$  atau  $N_i = M_i$  untuk semua  $i = 1, 2, 3, 4$ , maka jelas  $N$  submodul hampir prima. Misalkan terdapat  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  dengan  $N_i$  adalah submodul tak trivial, akan ditunjukkan  $N_i$  adalah submodul hampir prima. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $i = 1$ . Andaikan  $N_1$  bukan submodul hampir prima, maka terdapat  $r \notin (N_1:M_1)$  dan  $m \notin N_1$  sehingga  $rm \in N_1$ . Akibatnya  $r(m + m_2 + m_3 + m_4) \in N$  untuk suatu  $m_2 \in M_2, m_3 \in M_3, m_4 \in M_4$  dengan  $r \notin (N:M)$  dan  $m + m_2 + m_3 + m_4 \notin N$  (Kontradiksi). Jadi haruslah  $N_i$  submodul hampir prima. Lebih jauh, apabila terdapat  $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$  sehingga  $N_k, N_l$  submodul hampir prima yang tak trivial, akan ditunjukkan  $(N_k:M_k) = (N_l:M_l)$ . Andaikan  $(N_k:M_k) = \langle p \rangle \neq \langle q \rangle = (N_l:M_l)$ , tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $k = 1$  dan  $l = 2$ . Pilih  $r = p \notin (N:M)$  dan  $m = E_{11} + qE_{12} + \alpha_3E_{21} + \alpha_4E_{22} \notin N$ , didapatkan  $rm \in N - (N:M)N$ , hal ini kontradiksi dengan  $N$  submodul hampir prima. Akibatnya haruslah  $(N_k:M_k) = (N_l:M_l)$ . ■

Berdasarkan bukti pada Teorema 5, dengan mudah bisa didapatkan karakteristik submodul prima lemah dan submodul prima. Hal itu ditulis dalam sifat berikut.

**Akibat 2** Misalkan diberikan  $\mathbb{Z}$ -modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$ . Misalkan juga  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n) = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$  dengan  $M_i$  adalah matriks unit untuk semua  $i = 1, 2, 3, 4$ . Submodul  $N$  adalah submodul prima dari  $M$  jika dan hanya jika submodul  $N$  berbentuk  $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$  dengan  $N_i$  adalah submodul prima dari  $M_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, 4$  yang apabila  $N_i, N_j$  adalah submodul tak trivial,  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , maka  $(N_i:M_i) = (N_j:M_j)$ .

**Akibat 3** Misalkan diberikan  $\mathbb{Z}$ -modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n)$ . Misalkan juga  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_n) = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$  dengan  $M_i$  adalah matriks unit untuk semua  $i = 1, 2, 3, 4$ . Submodul  $N$  adalah submodul prima lemah dari  $M$  jika dan hanya jika submodul  $N$  berbentuk  $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4$  dengan  $N_i$  adalah submodul prima lemah dari  $M_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, 4$  yang apabila  $N_i, N_j$  adalah submodul tak trivial,  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , maka  $(N_i : M_i) = (N_j : M_j)$ .

Dari tiga sifat di atas maka dengan mudah mengidentifikasi submodul prima, submodul prima lemah dan submodul hampir prima.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Dauns, J., *Modules and Rings*. Cambridge University Press, New, 1994.
- [2] Hadi, M.A., *On Weakly Prime Submodules*, Ibn Al-Haitham Journal For Pure and Applied Science, 22 (3), 2009.
- [3] Khashan, Hani A., *On Almost Prime Submodules*, Acta Mathematica Scientia, 32B (2), 645-651, 2012.
- [4] Wardhana, I. G. A. W. and Astuti, P., *Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima Pada Modul  $\mathbb{Z}_n$  Atas Gelanggang  $\mathbb{Z}$* , Jurnal Matematika dan Sains (JMS) ITB, 19(1), 2014.
- [5] Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., Aini, Q., *Submodul Prima, Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima Pada  $\mathbb{Z}$ -modul  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_9)$* , Eigen Mathematics Journal, 1(1), 2018.
- [6] Roman, S., *Advance Linier Algebra, in : Graduated Text In Mathematics vol. 135*. Springer, New York, 2007.