



(0370)636629



Catur Building 2nd floor, Room 10 IKIP Mataram
Jln. Pemuda No. 59A, Mataram 83125



<https://elpsa.org/conference/2019>



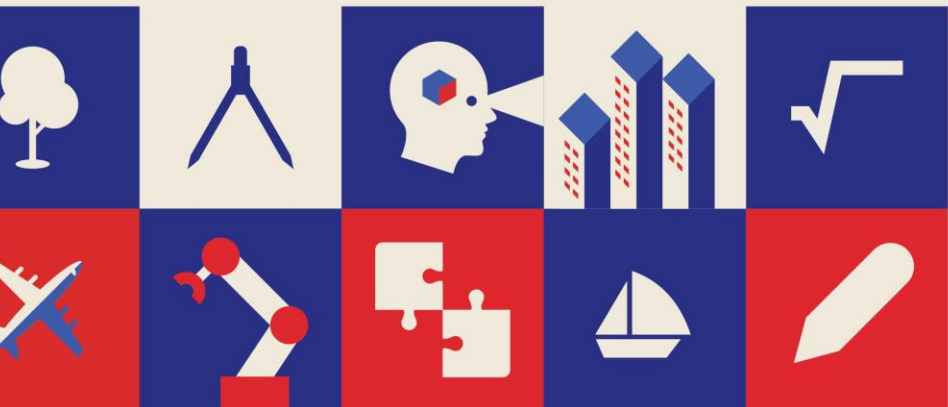
conference@elpsa.org



9 772621 372002



9 772621 385002



Buku Program

3rd ELP SA CONFERENCE 2019



P-ISSN 2621-3729

E-ISSN 2621-3850



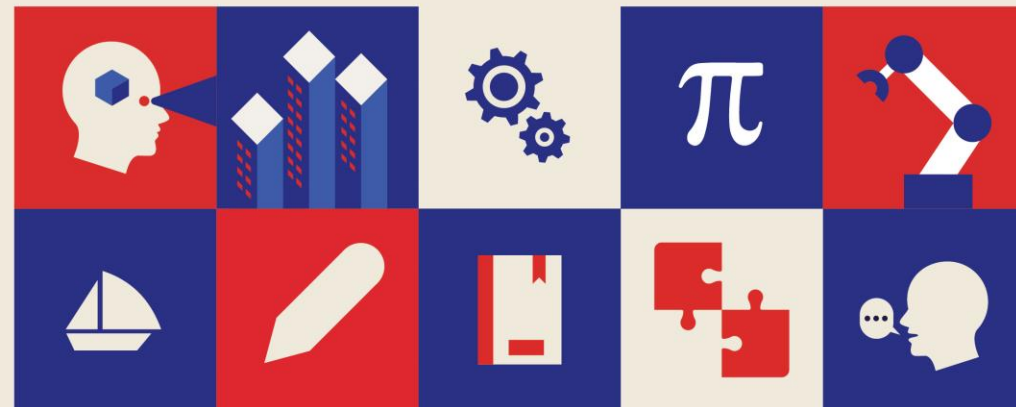
Proceedings

3rd ELP SA CONFERENCE 2019

“Promoting Higher Order Thinking Skills and
STEAM Based Learning: from Design to Action ”

**LOMBOK RAYA
HOTEL**

14 November 2019



**PROCEEDINGS
ELPSA CONFERENCE III**

ISSN:2621-3850

Volume 2, nomor 1, November 2019, halaman 1-403

Proceedings ELPsa Conference merupakan kumpulan hasil penelitian kelas para guru dan kajian konten matematika, pedagogi, penelitian kualitatif, serta kualitatif para dosen pendidikan matematika. Proceeding terbit 1 kali setahun pada bulan November.

Tim editor

Pelindung dan Penasehat

Prof. Kusno, DEA., Ph.D. (Rektor UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Penanggung jawab

Masjudin, M.Pd (Ketua Prodi Pend. Matematika UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Ade Kurniawan, M.Pd (Kapala Lab. Matematika UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Baiq Rika Ayu Febrilia, S.Si., M.Si (Ketua Panitia EC3, UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Ketua Penyunting

Yuntawati, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Wakil Ketua Penyunting

Sanapiah, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Penyunting Pelaksana

Dr. Sutarto, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Dr. Ahmad Muzaki, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Dr. I Ketut Sukarma, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Syahrir, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Sabrun, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Zainal Abidin, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Eliska Juliangkary, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Sri Yuliyanti, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Pujilestari, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)
Ita Chairun Nissa, M.Pd (UNDIKMA Mataram, Indonesia)

Mitra Bestari

Dr. Rahmah Johar, M.Pd (Universitas Syiah Kuala, Indonesia)
Dr. Muhammad Darwis, M.Pd (Universitas Negeri Makassar, Indonesia)
Prof. Dr. H. Nurdin Arsyad, M.Pd (Universitas Negeri Makassar, Indonesia)
Dr. Nurhardiani, ST., M.Pd (UIN Mataram, Indonesia)
Indira Putri Kinasih, M.Si (UIN Mataram, Indonesia)
Destina Wahyu Winarti, S.Si., M.Pd., M.Sc (University of Canberra)
Siti Rokhmah, M.Pd., M.Sc (University of Canberra)

Alamat Redaksi:

Laboratorium & Workshop Matematika UNDIKMA Mataram, Jalan Pemuda 59A, Kota Mataram, NTB 83125. Telpon 0370 632082
Website: <https://elpsa.org/conference/2019>, email: conference@elpsa.org

Kata Pengantar

Syukur alhamdulillah kami panjatkan kepada Allah S.W.T., atas perkenan-Nya buku **Prosiding ELPSA Conference III** dengan tema **“Memperkaya Literasi Matematika dan Pedagogi Guru Melalui Refleksi, Inovasi, dan Teknologi”** ini dapat diselesaikan sesuai dengan rencana. Kegiatan **ELPSA Conference III** ini diselenggarakan oleh Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan (IKIP Mataram) pada hari Kamis, tanggal 11 Nopember 2019 di Lombok Raya Hotel. Kegiatan seminar ini diadakan untuk memfasilitasi pendidik, pemerhati pendidikan, maupun pengembang pendidikan untuk bertukar pengalaman terbaik dalam praktek pembelajaran yang mendorong terjadinya pengembangan Literasi Matematika dan dan meningkatnya kemampuan Pedagogi Guru Melalui Refleksi, Inovasi, dan Teknologi. Selain itu, ELPSA Conference III ini juga sebagai wahana tukar pengalaman antar peserta seminar yang berdampak pada kultur saling asah, asih, dan asuh sesama pendidik. Selanjutnya sebagai wadah dari makalah-makalah yang telah diseminarkan tersebut maka perlu disusun suatu prosiding. Prosiding ini merupakan kumpulan makalah seminar nasional yang telah disunting oleh para penyunting ahli dibidangnya.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada semua pihak yang telah mendukung terlaksananya seminar ini, baik langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat kami sebutkan satu-persatu.

Akhirnya, semoga prosiding ini dapat bermanfaat dan member inspirasi bagi para pembaca, khususnya para pendidik dalam meningkatkan prestasi dan profesionalitasnya.

Mataram, 11 Nopember 2019

Panitia

Daftar Isi

Halaman Sampul	I
Tim Editorial	ii
Kata Pengantar	iii
Daftar Isi	iv
ANALISIS PROSES BERPIKIR MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN PERMASALAHAN MATEMATIKA PISA	1-11
Suning Rahayu, Baiq Rika Ayu Febrilia dan Yulianti	
ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN PERMASALAHAN VOLUME BENDA PUTAR	12-24
Baiq Dewi Korida, Baiq Rika Ayu Febrilia	
PENERAPAN MODEL INKUIRI TERBIMBING BERBANTUAN GEOGEBRA UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PENALARAN SPASIAL PADA KOMPETENSI GRAFIK FUNGSI KUADRAT	25-32
Muhdar	
PENGEMBANGAN MEDIA KUBUS AJAIB MENGGUNAKAN GRAFIK 3D GEOGEBRA UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN SPASIAL SISWA	33-47
Wayan Subadre	
BEBERAPA SIFAT GRUP KOMPLEKS DAN GRUP QUARTENION	48-54
Abdul Gazir S, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana	
P-GRUP PADA GRUP DIHEDRAL	55-59
Muhammad Irfan Hidayatdan I Gede Adhitya Wisnu Wardhana	
SIFAT-SIFAT IDEAL PRIMA PADA GELANGGANG NOETHER $\mathbb{Z}[x]/\langle x^3 \rangle$	60-64
Yunita Khairunnisa dan I Gede Adhitya Wisnu Wardhana	
IDEAL PRIMA PADA DAERAH DEDEKIND $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$	65-70

Muklas Maulana, I GedeAdhityaWisnu Wardhana

PERBANDINGAN IDEAL PRIMA PADA GELANGGANG POLINOM BILANGAN BULAT DAN GELANGGANG POLINOM BILANGAN BULAT MODULO 71-76

Daisyah Alifian Fatahillah, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana

KARAKTERISTIK GRAF PEMBAGI NOL PADA GELANGGANG BILANGAN BULAT MODULO (Z_n) 77-83

Rina Juliana, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana

PERAMALAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN MENGGUNAKAN METODE FUZZY TIME SERIES CHENG 84-95

Muhammad Azmi Khalqi, Mustika Hadijati dan Nurul Fitriyani

OPTIMALISASI PEMODELAN ANALISIS REGRESI LINEAR TERSEGMENT DENGAN DERET TAYLOR 96-101

Eka Okta Nurhasanah, Nurul Fitriyani

PERAMALAN HARGA HARIAN NILAI TUKAR RUPIAH (IDR) TERHADAP DOLLAR AMERIKA (USD) DENGAN METODE JARINGAN SYARAF TIRUAN BACKPROPAGATION 102-108

Hikmawati, Syamsul Bahri, Irwansyah

PENGEMBANGAN APLIKASI ANDROID SEBAGAI MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMP 109-119

Apdwi Syaeruldinata

ANALISIS PENALARAN SPASIAL PESERTA DIDIK SMPN 6 KOPANG BERDASARKAN TINGKAT KEMAMPUAN MATEMATIKA 120-129

Agus Suryadin

PENGEMBANGAN BAHAN AJAR PELATIHAN PENALARAN SPASIAL BAGI GURU MATEMATIKA SMP DI MGMP 130-143

Adi Wijaya

STRATEGI MEGA AKBER DEKUBORI DENGAN KERANGKA KERJA ELPsa BERBANTUAN MEDIA KONSTRUKTIVIS UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PENALARAN 144-156

Laila Wulandari

PENANAMAN KONSEP OPERASI PENJUMLAHAN DAN 157-165



PENGURANGAN BILANGAN BULAT MENGGUNAKAN TUTUP BOTOL PADA SISWA SMP

Musnah

SOLUSI PERIODIK PADA SISTEM PREDATOR PREY DAN PERMASALAHANNYA 166-172

Marwan

PENGARUH PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE TGT (TEAM GAME TOURNAMENT) TERHADAP PRESTASI BELAJAR MATEMATIKA SISWA MATERI SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL (SPLDV) 173-180

Nila Fitriliana

MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA MATERI LUAS LINGKARAN MELALUI PENDEKATAN SAINTIFIK 181-190

Zulfiana Hauli

PERBEDAAN KEMAMPUAN SISWA MEMECAHKAN MASALAH PROGRAM LINIER DALAM BENTUK SOAL CERITA DAN GRAFIK 191-204

Ita Chairun Nissa, Puji Lestari, Dian Kumala

PENINGKATAN AKTIVITAS DAN HASIL BELAJAR SISWA MELALUI TAHAPAN APLIKASI PADA ELPSA BERORIENTASI STEM 205-217

Nur A'ini Furqan

MENEMUKAN KEMANFAATAN MATEMATIKA MELALUI KERANGKA ELPSA DALAM MENINGKATKAN HASIL BELAJAR SISWA PADA MATERI HUBUNGAN PELUANG EMPIRIK DAN TEORITIK 218-228

Nurahmawati

ANALISIS KEMAMPUAN SISWA MENYELESAIKAN SOAL PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN BILANGAN BULAT DALAM PERMAINAN KARTU MERAH PUTIH 229-232

Suci Kurnia

PENGGUNAAN MASALAH OPEN ENDED UNTUK MENGANALISIS PEMAHAMAN KONSEP SISWA PADA MATERI STATISTIKA 233-235

Emmi Suhaimi

PROFIL PENALARAN STATISTIS MAHASISWA CALON GURU 236-250

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA IKIP MATARAM
DITINJAU DARI PERBEDAAN GENDER**

Pije Sanjaya, Baiq Rika Ayu Febrilia dan Zainal Abidin

**MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS
MATEMATISSISWA MELALUIKERANGKA KERJA ELPSATAHUN
PELAJARAN 2018/2019** **251-261**

Nasirah, Ade Kurniawan, Baiq Rika Ayu Febrilia

**PROFIL KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIKA MAHASISWA
DI TINJAU DARI JENIS KELAMIN** **262-271**

Baiq Dewi Kusuma Ananda dan Dwi Utami Setyawati

**PEMAHAMAN MAHASISWA DALAM MENGOPRASIKAN TEOREMA
LIMIT** **272-281**

Ekawati Dewi dan Zulmi Insani

**PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE TPS
BERBANTUAN LKS TERHADAP PEMAHAMAN KONSEP LUAS DAN
KELILINGSEGITIGA** **282-289**

Beny Saputra, Sanapiah dan Sabrun

**PENGEMBANGAN RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN
BERKERANGKA ELPSAPADA MATERI BARISAN KELAS XI** **290-342**

Fitria Febriani, Sanapiah dan Sri Yuliyanti

**PENINGKATAN KEMAMPUAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI SISWA
KONSEP PEMUSATAN PENGOLAHAN DATA STATISTIK DENGAN
PROGRAM EXCELL DI KELAS VII SMP NEGERI 1SEKONGKANG
MELALUI PENDEKATAN STEAM** **343-358**

Endah Ekowati

**PENERAPAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA REALISTIK (PMR)
MENGUNAKAN LKS UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN
KONSEP SISWA PADA MATERI GARIS DAN SUDUT KELAS VII** **359-364**

Baiq Rosita, Sri Yuliyanti

**PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN REALISTIC MATHEMATIC
EDUCATION (RME) UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN** **365-371**

KONSEP SISWA

Iis fardyanti, Yuntawati, Pujilestari

ANALISIS KEMAMPUAN PENYELESAIAN SOAL FUNGSI DITINJAU DARI TAKSONOMI BLOOM REVISI PADA SISWA KELAS IX MTS QUR'ANIYAH BATU KUTA **372-384**

Suhaini, Masjudin, Yuntawati, Zulkifli

PENGEMBANGAN MODUL TEORI GRAPH BERBASIS PROBLEM BASED LEARNING PADA MATERI GRAPH DAN JENIS-JENIS GRAPH **385-395**

Dedy Karisma, Eliska Juliangkary

PENERAPAN PENDEKATAN PEMBELAJARAN SCIENTIFIC UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR SISWA **396-403**

Muhammad Muhajirin, Masjudin, dan Ade Kurniawan



Karakteristik Graf Pembagi Nol Pada Gelanggang Bilangan Bulat Modulo (\mathbb{Z}_n)

Rina Juliana¹, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana²

^{1,2}Program Studi Matematika FMIPA Universitas Mataram,
rina.juliana@unram.ac.id,
adhitya.wardhana@unram.ac.id

Abstract: Zero-divisor graph is a geometric representation of a commutative ring. Zero-divisor graph that denoted by $\Gamma(\mathbb{R})$, defined by a graph whose vertices are all elements of zero-divisor set of a ring \mathbb{R} , and two distinct vertices a and b are adjacent if and only if $ab = 0$. In this paper, we will study some of the characterizations of the zero-divisor graph of integers modulo n ring. This study aims to know some forms of zero-divisor graph of ring \mathbb{Z}_n and its properties. The method that used in this paper is deductive proof, by taking some example of zero-divisor graph of ring \mathbb{Z}_n , then generalized the characterization of example. The first result is if $n = p^2$, with p a prime number and $p \geq 3$, then the zero-divisor graph of ring \mathbb{Z}_n is a complete graph. Then the second result is if $n = p_1 p_2$, with p_1, p_2 different prime numbers, then the zero-divisor graph of ring \mathbb{Z}_n is a complete bipartite graph and the diameter is 2.

Keywords: zero-divisor graph, integers modulo n ring, complete graph, bipartite graph

Abstrak: Graf pembagi nol merupakan salah satu bentuk representasi geometri dari gelanggang komutatif. Graf pembagi nol yang dinotasikan dengan $\Gamma(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai graf yang himpunan simpulnya terdiri dari semua elemen himpunan pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif \mathbb{R} , dan dua simpul a dan b akan bertetangga jika dan hanya jika $ab = 0$. Pada tulisan ini, akan dibahas beberapa karakteristik graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo (\mathbb{Z}_n). Tujuan dari penelitian ini ialah untuk mengetahui bentuk-bentuk graf pembagi nol dari gelanggang bilangan bulat modulo (\mathbb{Z}_n) dan beberapa sifatnya. Metode yang digunakan dalam penelitian ini ialah *deductive proof*, dilakukan dengan mencari beberapa contoh graf pembagi nol dari gelanggang bilangan bulat modulo (\mathbb{Z}_n), kemudian merumuskan karakteristik dari beberapa contoh tersebut secara umum. Hasil pertama yang diperoleh ialah ketika $n = p^2$, dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$, diperoleh graf pembagi nol dari gelanggang \mathbb{Z}_n yaitu graf lengkap. Hasil kedua ialah ketika $n = p_1 p_2$, dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka graf pembagi nol dari \mathbb{Z}_n adalah graf bipartit lengkap, dan diameter dari graf tersebut ialah 2.

Kata kunci: graf pembagi nol, gelanggang bilangan modulo n , graf lengkap, graf bipartit

PENDAHULUAN

Studi mengenai graf menjadi topik bahasan yang cukup menarik belakangan ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah atau titik, dan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau sisi. Graf dapat dipakai dalam berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Penggunaan graf pada berbagai bidang tersebut adalah untuk memodelkan permasalahan, misalnya memodelkan rangkaian listrik, isomer senyawa kimia karbon, dan pengujian program. Matematikawan juga menggunakan graf dan sifat-sifatnya dalam merepresentasikan suatu struktur aljabar, salah

satunya gelanggang. Gelanggang merupakan suatu himpunan tak kosong yang membentuk grup komutatif terhadap operasi penjumlahan serta bersifat asosiatif dan tertutup terhadap operasi perkalian.

Graf pembagi nol dinotasikan dengan $\Gamma(R)$, didefinisikan sebagai graf yang himpunan simpulnya terdiri dari semua elemen himpunan pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif R , dan dua simpul a dan b akan bertetangga jika dan hanya jika $ab = 0$ (Nazzal & Ghanem, 2014). Adapun penelitian terkait mengenai graf pembagi nol yaitu penelitian yang dilakukan oleh (Wicaksono & Sholeha, 2013), yang mengkaji bentuk graf pembagi nol dari beberapa gelanggang komutatif. Hasil yang diperoleh ialah konstruksi bentuk graf pembagi nol dari gelanggang yang himpunan pembagi nolnya berupa ideal penghilang dan beberapa kasus ketika graf yang terbentuk graf bintang dan graf lengkap. Hal inilah yang menarik penulis untuk mengetahui tentang sifat-sifat graf pembagi nol dari suatu gelanggang spesifik yang belum dikaji, seperti gelanggang bilangan bulat modulo. Sehingga pada tulisan ini, akan dibahas beberapa karakteristik graf pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif, yaitu gelanggang bilangan bulat modulo (\mathbb{Z}_n) .

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Deductive Proof*, yaitu dengan membuat konjektur berdasarkan sifat-sifat yang sudah ada kemudian dibuktikan dengan *rigorous proof*. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengkaji definisi dan teori mengenai graf pembagi nol dan gelanggang bilangan bulat modulo. Selanjutnya, yaitu mengkaji beberapa contoh dan membahas beberapa karakteristik dari graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teori Gelanggang dan Graf

Beberapa teori yang mendasari penelitian ini, ialah teori gelanggang dan graf. Suatu gelanggang adalah struktur aljabar dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi beberapa kondisi. Definisi berikut menjelaskan hal tersebut lebih jauh.

Definisi 1 (Smith, 2016)

Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian (\cdot) dinamakan gelanggang jika memenuhi beberapa aksioma berikut:

- $(R, +)$ merupakan grup komutatif
- Operasi (\cdot) bersifat asosiatif, yakni $(axb)xc = a x (bxc)$ untuk setiap $a, b, c \in R$
- Hukum distributif berlaku pada R , yakni untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $ax(bxc) = (axb) + (axc)$ dan $(axb)xc = (axc) + (bxc)$.

Definisi 2 (Smith, 2016)

Gelanggang R dikatakan komutatif jika operasi (\cdot) bersifat komutatif, yakni $axb = bxa$ untuk setiap $a, b \in R$.

Definisi 3 (Fraleigh, 2014)

Misalkan R adalah gelanggang. Suatu elemen tak nol $a \in R$ disebut elemen pembagi nol jika terdapat suatu unsur tak nol $b \in R$ sehingga $ab = 0$ atau $ba = 0$. Himpunan semua pembagi nol dari gelanggang R disimbolkan dengan $Z(R)$. Gelanggang yang tidak memiliki elemen pembagi nol disebut daerah integral.

Definisi 4 (Romdhini, Irwansyah,& Switrayni, 2016)

Suatu subhimpunan tak kosong I dari gelanggang R disebut ideal jika

- a. I merupakan subgroup dari R , yakni untuk $a, b \in I$ berlaku $a - b \in I$
- b. I tertutup terhadap operasi perkalian oleh setiap unsur di gelanggang R , yakni jika $a \in I, r \in R$ maka $ar \in I$ dan $ra \in I$.

Definisi 5 (Romdhini, Irwansyah,& Switrayni, 2016)

Misalkan R suatu ring, ideal yang dibangun oleh suatu unsur $a \in R$ dinamakan ideal utama, yakni $\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}$.

Graf pembagi nol merupakan bentuk representasi geometri dari suatu gelanggang komutatif yang memiliki elemen pembagi nol. Berikut ini beberapa definisi terkait graf dan terminologinya.

Definisi 5(Munir, 2010)

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul. Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.

Definisi 6 (Munir, 2010)

Graf sederhana ialah graf yang tidak mengandung gelang ataupun sisi ganda.

Definisi 7(Munir, 2010)

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n .

Definisi 8 (Munir, 2010)

Graf G yang himpunan simpulnya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap sisi di dalam G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut graf bipartit dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Jika setiap simpul di V_1 dan V_2 saling terhubung maka graf tersebut disebut graf bipartit lengkap.

Definisi 9 (Abdussakir, 2009)

Jarak $d(u, v)$ antara dua simpul u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari simpul u ke v . Eksentrisitas $ec(v)$ pada sebuah titik v dalam graf G adalah jarak terjauh dari simpul v ke setiap simpul di G . Radius $r(G)$ dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap simpul di G , sedangkan diameter dari G dinotasikan $dia(G)$ adalah maksimum pada setiap titik G .

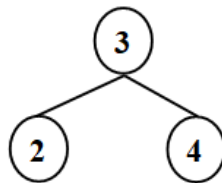
Beberapa Bentuk Graf Pembagi Nol

Gelanggang bilangan bulat modulo merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan, berdasarkan definisi gelanggang bulat modulo dapat dinyatakan sebagai gelanggang $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Untuk n bilangan prima, gelanggang \mathbb{Z}_n tidak memiliki elemen pembagi nol karena merupakan daerah integral, sehingga tidak dapat diperoleh graf pembagi nol dari gelanggang \mathbb{Z}_n untuk n bilangan prima. Untuk n bilangan komposit, maka n dapat dinyatakan sebagai $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j}$, p_1, p_2, \dots, p_j bilangan prima yang berbeda dan $k_1, k_2, \dots, k_j \in \mathbb{N}$, maka gelanggang \mathbb{Z}_n memiliki elemen pembagi nol sebanyak $n - n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) - 1$. Berikut ini beberapa bentuk graf pembagi nol yang diperoleh dari gelanggang komutatif \mathbb{Z}_n .

- Gelanggang $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$Z(\mathbb{Z}_6) = \{2, 3, 4\}$$

Dengan $2 \cdot 3 = 0, 4 \cdot 3 = 0$, sehingga 2 dan 4 bertetangga dengan 3. Graf pembagi nol yang terbentuk sebagai berikut.



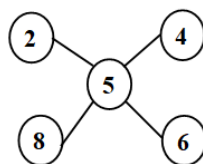
Gambar 1. $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$

Dari gambar 1 tersebut dapat diketahui $ec(2) = ec(4) = 2$ dan $ec(3) = 1$. Sehingga $r(\Gamma(\mathbb{Z}_6)) = 1$ dan $dia(\Gamma(\mathbb{Z}_6)) = 2$.

- Gelanggang $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$Z(\mathbb{Z}_{10}) = \{2, 4, 6, 8, 5\}$$

Dengan $2 \cdot 5 = 0, 4 \cdot 5 = 0, 6 \cdot 5 = 0$, dan $8 \cdot 5 = 0$, sehingga 2, 4, 6, dan 8 bertetangga dengan 5. Graf pembagi nol yang terbentuk sebagai berikut.



Gambar 2. $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$

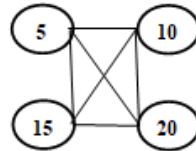


Dari gambar 2 tersebut dapat diketahui $ec(2) = ec(4) = ec(6) = ec(8) = 2$ dan $ec(5) = 1$. Sehingga $r(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})) = 1$ dan $dia(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})) = 2$.

- Gelanggang $\mathbb{Z}_{25} = \{0, 1, 2, \dots, 24\}$

$$Z(\mathbb{Z}_{25}) = \{5, 10, 15, 20\}$$

Dengan $10 \cdot 5 = 0, 15 \cdot 5 = 0, 20 \cdot 5 = 0, 10 \cdot 15 = 0, 10 \cdot 20 = 0$, dan $15 \cdot 20 = 0$ sehingga 10, 15, 20, dan 5 saling bertetangga. Graf pembagi nol yang terbentuk sebagai berikut.



Gambar 3. $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$

Dari gambar 3 tersebut dapat diketahui $ec(5) = ec(10) = ec(15) = ec(20) = 1$. Sehingga $r(\Gamma(\mathbb{Z}_6)) = dia(\Gamma(\mathbb{Z}_6)) = 1$.

Berdasarkan hasil tersebut, dapat dirumuskan beberapa teorema berikut.

Teorema 1

Jika diberikan gelanggang komutatif \mathbb{Z}_n , dengan $n = p^2, p$ bilangan prima, $p \geq 3$, maka graf pembagi nol dari gelanggang \mathbb{Z}_n adalah graf lengkap.

Bukti:

Misalkan diberikan gelanggang komutatif \mathbb{Z}_n , dengan $n = p^2$, maka $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$.

Ideal maksimal dari \mathbb{Z}_n dibangun oleh p , yaitu $\langle p \rangle = \{lp \mid l \in \mathbb{Z}_n\}$. Sehingga himpunan pembagi nol dari \mathbb{Z}_n yaitu $Z(\mathbb{Z}_n) = \langle p \rangle - \{0\}$. Dengan demikian untuk setiap $a, b \in Z(\mathbb{Z}_n)$ dapat dinyatakan $a = n_1p$ dan $b = n_2p$, untuk suatu $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Sehingga diperoleh $ab = (n_1p)(n_2p) = (n_1n_2)p^2 = mp^2$, dengan kata lain $ab = 0$, sehingga a bertetangga dengan b . Dengan demikian diperoleh graf pembagi nol dari \mathbb{Z}_n adalah graf lengkap. ■

Teorema 2

Jika diberikan gelanggang komutatif \mathbb{Z}_n , dengan $n = p_1p_2$, dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka graf pembagi nol dari \mathbb{Z}_n adalah graf bipartit lengkap.

Bukti:

Misalkan diberikan gelanggang komutatif \mathbb{Z}_n , dengan $n = p_1p_2$, maka $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, p_1p_2 - 1\}$. Ideal maksimal dari \mathbb{Z}_n dibangun oleh p_1 dan p_2 , yaitu $\langle p_1 \rangle$ dan $\langle p_2 \rangle$. Sehingga himpunan pembagi nol dari \mathbb{Z}_n yaitu $Z(\mathbb{Z}_n) = \langle p_1 \rangle \cup \langle p_2 \rangle - \{0\}$. Dengan demikian $Z(\mathbb{Z}_n)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan yaitu

$$V_1 = \langle p_1 \rangle - \{0\}$$

$$V_2 = \langle p_2 \rangle - \{0\}$$

Karena p_1, p_2 bilangan prima yang berbeda, maka $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sehingga untuk setiap $a \in V_1$ dan $b \in V_2$ berlaku $ab = (n_1 p_1)(n_2 p_2) = (n_1 n_2) p_1 p_2 = m p_1 p_2$. Dengan kata lain $ab = 0$, sehingga a bertetangga dengan b . Dan untuk setiap $x, y \in V_1$, maka $x = k_1 p_1, y = k_2 p_1$ untuk suatu $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Karena $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, maka $x, y \notin V_2$, akibatnya $p_2 \nmid x$ dan $p_2 \nmid y$. Sehingga $p_2 \nmid xy$, dengan demikian $xy = (k_1 p_1)(k_2 p_1) \neq 0$, dengan kata lain x dan y tidak bertetangga. Hal yang sama berlaku juga untuk setiap $x, y \in V_2$. Dengan demikian diperoleh graf pembagi nol dari \mathbb{Z}_n adalah graf bipartit lengkap. ■

Dari beberapa contoh di atas, dapat diketahui bahwa untuk $n = p^2$ dengan p bilangan prima, maka eksentrisitas dari setiap simpul pada graf pembagi nol gelanggang \mathbb{Z}_n sama yaitu 1 karena merupakan graf lengkap. Sehingga radius dan diameternya sama dengan 1. Sedangkan untuk $n = p_1 p_2$ dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, diperoleh diameter dari graf pembagi nol sama dengan 2, yang dibuktikan pada teorema berikut.

Teorema 3.

Jika diberikan gelanggang komutatif \mathbb{Z}_n , dengan $n = p_1 p_2$, di mana p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka diameter graf pembagi nol dari gelanggang \mathbb{Z}_n adalah 2.

Bukti:

Misalkan $n = p_1 p_2$, dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, p_1 p_2 - 1\}$. Berdasarkan teorema 2, diperoleh graf pembagi nol dari \mathbb{Z}_n yaitu graf bipartit lengkap. Dengan kata lain $Z(\mathbb{Z}_n)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan yaitu V_1 dan V_2 sehingga setiap elemen V_1 bertetangga dengan setiap elemen V_2 . Sehingga untuk setiap $a, b \in Z(\mathbb{Z}_n)$, jika $a \in V_1, b \in V_2$ atau sebaliknya, maka a terhubung langsung dengan b , akibatnya $d(a, b) = 1$. Jika $a, b \in V_1$ maka a tidak terhubung langsung dengan b , tetapi pasti ada $c \in V_2$ yang menghubungkan a dan b , akibatnya $d(a, b) = 2$, begitu pula untuk $a, b \in V_2$. Dengan demikian, diameter graf pembagi nol dari gelanggang \mathbb{Z}_n adalah 2. ■

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan, dapat diambil kesimpulan mengenai beberapa karakteristik graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo n sebagai berikut:

1. Jika $n = p^2, p$ bilangan prima, $p \geq 3$ maka graf pembagi nol dari gelanggang \mathbb{Z}_n berbentuk graf lengkap.
2. Jika $n = p_1 p_2$, dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka graf pembagi nol dari \mathbb{Z}_n adalah graf bipartit lengkap, dan diameter dari graf tersebut ialah 2.

Saran untuk penelitian selanjutnya ialah perlu dilakukan penelitian bentuk-bentuk graf pembagi nol pada gelanggang yang lebih kompleks dan juga ideal-idealnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. (2017). Radius, Diameter, Multiplisitas Sikel, dan Dimensi Metrik Graf Komuting dari Grup Dihedral. *Jurnal Matematika “Mantik”*, 3(1), 1-4. doi: 10.15642/mantik.2017.3.1.1-4

- Fraleigh, J. B. (2014). *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed.). United States of America: Pearson Education Limited.
- Munir, Rinaldi. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika Bandung.
- Nazzal, K.& Ghanem, M. (2014). Some Properties of The Zero Divisor Graph of A Commutative Ring. *Discussion Mathematicae General Algebra and Applications*, 34(1), 167-181. doi:10.7151/dmgaa.1222
- Romdhini, M. U., Irwansyah, & Switrayni, N. W. (2016). *Struktur Aljabar*. Mataram: Universitas Mataram.
- Smith, J. D. H. (2016). *Introduction to Abstract Algebra* (2nd ed.). New York: CRC Press.
- Wicaksono, S. A. & Soleha. (2013). Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*, 2(1), 1-5. doi: 2337-3520(2301-928X Print)