(0370)636629

Catur Building 2nd floor, Room 10 IKIP Mataram
Jln. Pemuda No. 59A, Mataram 83125

https://elpsa.org/conference/2019

conference@elpsa.org

Buku Program

3rd ELPSA CONFERENCE 2019

UNIVERSITY OF CANBERRA

P-ISSN 2621-3729

E-ISSN 2621-3850

Proceedings

3rd ELPSA CONFERENCE 2019

"Promoting Higher Order Thinking Skills and STEAM Based Learning: from Design to Action "

LOMBOK RAYA HOTEL

14 November 2019

PROCEDINGS
ELPSA CONFERENCE III
ISSN:2621-3850
Volume 2, nomor 1, November 2019, halaman 1-403

Proceedings ELPSA Conference merupakan kumpulan hasil penelitian kelas para guru dan kajian konten matematika, pedagogi, penelitian kualitatif, serta kualitatif para dosen pendidikan matematika. Proceding terbit 1 kali setahun pada bulan November.

Alamat Redaksi:
Laboratorium & Workshop Matematika UNDIKMA Mataram, Jalan Pemuda 59A, Kota Mataram, NTB 83125. Telpon 0370 632082
Website: https:/elpsa/org/conference/2019, email:conference@elpsa.org

Kata Pengantar

Syukur alhamdulillah kami panjatkan kepada Allah S.W.T., atas perkenan-Nya buku ***Prosiding*** **ELPSA Conference III**dengantema ***"Memperkaya Literasi Matematika dan Pedagogi Guru Melalui Refleksi, Inovasi, dan Teknologi"*** ini dapat diselesiakan sesuai dengan rencana. Kegiatan **ELPSA Conference III** ini diselenggarakan oleh Instutut Keguruan dan Ilmu Pendidikan (IKIP Mataram) pada hari Kamis, tanggal 11 Nopember 2019 di Lombok Raya Hotel. Kegiatan seminar ini diadakan untuk memfasilitasi pendidik, pemerhati pendidikan, maupun pengembang pendidikan untuk bertukar pengalaman terbaik dalam praktek pembelajaran yang mendorong terjadinya pengembangan Literasi Matematika dan dan meningkatnya kemampuan Pedagogi Guru Melalui Refleksi, Inovasi, dan Teknologi. Selain itu, ELPSA Conference III ini juga sebagai wahana tukar pengalaman antar peserta seminar yang berdampak pada kultur saling asah, asih, dan asuh sesama pendidik. Selanjutnya sebagai wadah dari makalah-makalah yang telah diseminarkan tersebut maka perlu disusun suatu prosiding. Prosiding ini merupakan kumpulan makalah seminar nasional yang telah disunting oleh para penyunting ahli dibidangnya.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada semua pihak yang telah mendukung terlaksananya seminar ini, baik langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat kami sebutkan satu-persatu.

Akhirnya, semoga prosiding ini dapat bermanfaat dan member inspirasi bagi para pembaca, khususnya para pendidik dalam meningkatkan prestasi dan profesionalitasnya.

Mataram, 11 Nopember 2019

Panitia

 ISSN:2621-3850

Daftar Isi

Karakteristik Graf Pembagi Nol Pada Gelanggang Bilangan Bulat Modulo $(\mathbb{Z}_n)$

Rina Juliana[1], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[2]

[1,2]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Mataram,
rina.juliana@unram.ac.id,
adhitya.wardhana@unram.ac.id

Abstract: *Zero-divisor graph is a geometric representation of a commutative ring. Zero-divisor graph that denoted by $\Gamma(R)$, defined by a graph whose vertices are all elements of zero-divisor set of a ring R, and two distinct vertices a and b are adjacent if and only if $ab = 0$. In this paper, we will study some of the characterizations of the zero-divisor graph of integers modulo n ring. This study aims to know some forms of zero-divisor graph of ring $\mathbb{Z}_n$and its properties. Themethod that used in this paper is deductive proof, by taking some example of zero-divisor graph of ring $\mathbb{Z}_n$, then generalized the characterization of example. The firts result is if $n = p^2$, with p a prime number and $p \geq 3$, then the zero-divisor graph of ring $\mathbb{Z}_n$ is a complete graph. Then the second result is if $n = p_1p_2$, with p_1, p_2 different prime numbers, then the zero-divisor graph of ring $\mathbb{Z}_n$ is a complete bipartite graph and the diameter is 2.*

Keywords*: zero-divisor graph, integers modulo n ring, complete graph, bipartite graph*

Abstrak: Graf pembagi nol merupakan salah satu bentuk representasi geometri dari gelanggang komutatif. Graf pembagi nol yang dinotasikan dengan $\Gamma(R)$, didefinisikan sebagai graf yang himpunan simpulnya terdiri dari semua elemen himpunan pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif R, dan dua simpul a dan b akan bertetangga jika dan hanya jika $ab = 0$. Pada tulisan ini, akan dibahas beberapa karakteristik graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo $(\mathbb{Z}_n)$. Tujuan dari penelitian ini ialah untuk mengetahui bentuk-bentuk graf pembagi nol dari gelanggang bilangan bulat modulo $(\mathbb{Z}_n)$ dan beberapa sifatnya. Metode yang digunakan dalam penelitian ini ialah *deductive proof*, dilakukan dengan mencari beberapa contoh graf pembagi nol dari gelanggang bilangan bulat modulo $(\mathbb{Z}_n)$, kemudian merumuskan karakteristik dari beberapa contoh tersebut secara umum. Hasil pertama yang diperoleh ialah ketika $n = p^2$, dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$, diperoleh graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ yaitu graf lengkap. Hasil kedua ialah ketika $n = p_1p_2$, dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf bipartit lengkap, dan diameter dari graf tersebut ialah 2.

Kata kunci: graf pembagi nol, gelanggang bilangan modulo n, graf lengkap, graf bipartit

PENDAHULUAN

Studi mengenai graf menjadi topik bahasan yang cukup menarik belakangan ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah atau titik, dan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau sisi. Graf dapat dipakai dalam berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Penggunaan graf pada berbagai bidang tersebut adalah untuk memodelkan permasalahan, misalnya memodelkan rangkaian listrik, isomer senyawa kimia karbon, dan pengujian program. Matematikawan juga menggunakan graf dan sifat-sifatnya dalam merepresentasikan suatu struktur aljabar, salah satunya gelanggang. Gelanggang merupakan suatu himpunan tak kosong yang membentuk grup komutatif terhadap operasi penjumlahan serta bersifat asosiatif dan tertutup terhadap operasi perkalian.

Graf pembagi nol dinotasikan dengan $\Gamma(R)$, didefinsikan sebagai graf yang himpunan simpulnya terdiri dari semua elemen himpunan pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif R, dan dua simpul a dan b akan bertetangga jika dan hanya jika $ab = 0$ (Nazzal & Ghanem, 2014).Adapun penelitian terkait mengenai graf pembagi nol yaitu penelitian yang dilakukan oleh (Wicaksono& Sholeha, 2013), yang mengkaji bentuk graf pembagi nol dari beberapa gelanggang komutatif. Hasil yang diperoleh ialah konstruksi bentuk graf pembagi nol dari gelanggang yang himpunan pembagi nolnya berupa ideal penghilang dan beberapa kasus ketika graf yang terbentuk graf bintang dan graf lengkap. Hal inilah yang menarik penulis untuk mengetahui tentang sifat-sifat graf pembagi nol dari suatu gelanggang spesifik yang belum dikaji, seperti gelanggang bilangan bulat modulo. Sehingga pada tulisan ini, akan dibahas beberapa karakteristik graf pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif, yaitu gelanggang bilangan bulat modulo $(\mathbb{Z}_n)$.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Deductive Proof*, yaitu dengan membuat konjektur berdasarkan sifat-sifat yang sudah ada kemudian dibuktikan dengan *rigorous proof*. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengkaji definisi dan teori mengenai graf pembagi nol dan gelanggang bilangan bulat modulo. Selanjutnya, yaitu mengkaji beberapa contoh dan membahas beberapa karakteristik dari graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teori Gelanggang dan Graf

Beberapa teori yang mendasari penelitian ini, ialah teori gelanggang dan graf. Suatu gelanggang adalah struktur aljabar dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi beberapa kondisi. Definisi berikut menjelaskan hal tersebut lebih jauh.

Definisi 1 (Smith, 2016)
Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian (x) dinamakan gelanggang jika memenuhi beberapa aksioma berikut:

a. $(R, +)$ merupakan grup komutatif
b. Operasi (x) bersifat asosiatif, yakni $(axb)xc = a\ x\ (bxc)$ untuk setiap $a, b, c \in R$
c. Hukum distributif berlaku pada R, yakni untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $ax(bxc) = (axb) + (axc)$ dan $(axb)xc = (axc) + (bxc)$.

Definisi 2 (Smith, 2016)
Gelanggang R dikatakan komutatif jika operasi (x) bersifat komutatif, yakni $axb = bxa$ untuk setiap $a, b \in R$.

Definisi 3 (Fraleigh, 2014)
Misalkan R adalah gelanggang. Suatu elemen tak nol $a \in R$ disebut elemen pembagi nol jika terdapat suatu unsur tak nol $b \in R$ sehingga $ab = 0$ atau $ba = 0$. Himpunan semua pembagi nol dari gelanggang R disimbolkan dengan $Z(R)$. Gelanggang yang tidak memiliki elemen pembagi nol disebut daerah integral.

Definisi 4 (Romdhini, Irwansyah,& Switrayni, 2016)
Suatu subhimpunan tak kosong I dari gelanggang R disebut ideal jika

a. I merupakan subgroup dari R, yakni untuk $a, b \in I$ berlaku $a - b \in I$
b. I tertutup terhadap operasi perkalian oleh setiap unsur di gelanggang R, yakni jika $a \in I$, $r \in R$ maka $ar \in I$ dan $ra \in I$.

Definisi 5 (Romdhini, Irwansyah,& Switrayni, 2016)
Misalkan R suatu ring, ideal yang dibangun oleh suatu unsur $a \in R$ dinamakan ideal utama, yakni $\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}$.

Graf pembagi nol merupakan bentuk representasi geometri dari suatu gelanggang komutatif yang memiliki elemen pembagi nol. Berikut ini beberapa definisi terkait graf dan terminologinya.

Definisi 5(Munir, 2010)
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul. Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.

Definisi 6 (Munir, 2010)
Graf sederhana ialah graf yang tidak mengandung gelang ataupun sisi ganda.

Definisi 7(Munir, 2010)
Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n.

Definisi 8 (Munir, 2010)
Graf G yang himpunan simpulnya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi di dalam G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut graf bipartit dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Jika setiap simpul di V_1 dan V_2 saling terhubung maka graf tersebut disebut graf bipartit lengkap.

Definisi 9 (Abdussakir, 2009)

Jarak $d(u,v)$ antara dua simpul u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari simpul u ke v. Eksentrisitas $ec(v)$ pada sebuah titik v dalam graf G adalah jarak terjauh dari simpul v ke setiap simpul di G. Radius $r(G)$ dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap simpul di G, sedangkan diameter dari G dinotasikan $dia(G)$ adalah maksimum pada setiap titik G.

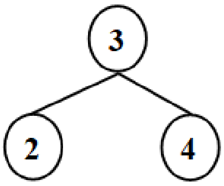
Beberapa Bentuk Graf Pembagi Nol

Gelanggang bilangan bulat modulo merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan, berdasarkan definisi gelanggang bulat modulo dapat dinyatakan sebagai gelanggang $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\dots,n-1\}$. Untuk n bilangan prima, gelanggang $\mathbb{Z}_n$ tidak memiliki elemen pembagi nol karena merupakan daerah integral, sehingga tidak dapat diperoleh graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ untuk n bilangan prima. Untuk n bilangan komposit, maka n dapat dinyatakan sebagai $n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\dots{p_j}^{k_j}$, $p_1, p_2, \dots, p_j$ bilangan prima yang berbeda dan $k_1, k_2, \dots, k_j \in N$, maka gelanggang $\mathbb{Z}_n$ memiliki elemen pembagi nol sebanyak $n - n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_j}\right) - 1$. Berikut ini beberapa bentuk graf pembagi nol yang diperoleh dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$.

- Gelanggang $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

  $Z(\mathbb{Z}_6) = \{2,3,4\}$

  Dengan $2.3 = 0, 4.3 = 0$, sehingga 2 dan 4 bertetangga dengan 3. Graf pembagi nol yang terbentuk sebagai berikut.



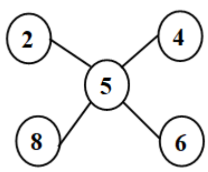
Gambar 1. $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$

  Dari gambar 1 tersebut dapat diketahui $ec(2) = ec(4) = 2$ dan $ec(3) = 1$. Sehingga $r(\Gamma(\mathbb{Z}_6)) = 1$ dan $dia(\Gamma(\mathbb{Z}_6)) = 2$.

- Gelanggang $\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

  $Z(\mathbb{Z}_{10}) = \{2,4,6,8,5\}$

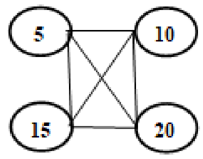
  Dengan $2.5 = 0, 4.5 = 0, 6.5 = 0$, dan $8.5 = 0$, sehingga 2, 4, 6, dan 8 bertetangga dengan 5. Graf pembagi nol yang terbentuk sebagai berikut.



Gambar 2. $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$

Dari gambar 2 tersebut dapat diketahui $ec(2) = ec(4) = ec(6) = ec(8) = 2$ dan $ec(5) = 1$. Sehingga $r\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})\big) = 1$ dan $dia\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})\big) = 2$.

- Gelanggang $\mathbb{Z}_{25} = \{0,1,2,\ldots,24\}$
  $Z(\mathbb{Z}_{25}) = \{5,10,15,20\}$
  Dengan $10.5 = 0, 15.5 = 0, 20.5 = 0, 10.15 = 0, 10.20 = 0$, dan 15.20=0 sehingga 10, 15, 20, dan 5 saling bertetangga. Graf pembagi nol yang terbentuk sebagai berikut.



Gambar 3. $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$

Dari gambar 3 tersebut dapat diketahui $ec(5) = ec(10) = ec(15) = ec(20) = 1$. Sehingga $r\big(\Gamma(\mathbb{Z}_6)\big) = dia\big(\Gamma(\mathbb{Z}_6)\big) = 1$.

Berdasarkan hasil tersebut, dapat dirumuskan beberapa teorema berikut.

Teorema 1
Jika diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p^2, p$ bilangan prima, $p \geq 3$, maka graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ adalah graf lengkap.
Bukti:
Misalkan diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p^2$, maka $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_n$ dibangun oleh p, yaitu $\langle p\rangle = \{lp \mid l \in \mathbb{Z}_n\}$. Sehingga himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ yaitu $Z(\mathbb{Z}_n) = \langle p\rangle - \{0\}$. Dengan demikian untuk setiap $a, b \in Z(\mathbb{Z}_n)$ dapat dinyatakan $a = n_1 p$ dan $b = n_2 p$, untuk suatu $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Sehingga diperoleh
$ab = (n_1 p)(n_2 p) = (n_1 n_2)p^2 = mp^2$, dengan kata lain $ab = 0$, sehingga a bertetangga dengan b. Dengan demikian diperoleh graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$adalah graf lengkap. ∎

Teorema 2
Jika diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p_1 p_2$, dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf bipartit lengkap.
Bukti:
Misalkan diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p_1 p_2$, maka $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\ldots,p_1 p_2 - 1\}$. Ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_n$ dibangun oleh p_1 dan p_2, yaitu $\langle p_1\rangle$dan $\langle p_2\rangle$. Sehingga himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ yaitu $Z(\mathbb{Z}_n) = \langle p_1\rangle \cup \langle p_2\rangle - \{0\}$. Dengan demikian $Z(\mathbb{Z}_n)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan yaitu
$V_1 = \langle p_1\rangle - \{0\}$
$V_2 = \langle p_2\rangle - \{0\}$

Karena p_1, p_2 bilangan prima yang berbeda, maka $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sehingga untuk setiap $a \in V_1$dan $b \in V_2$berlaku $ab = (n_1p_1)(n_2p_2) = (n_1n_2)p_1p_2 = mp_1p_2$. Dengan kata lain $ab = 0$, sehingga a bertetangga dengan b. Dan untuk setiap $x, y \in V_1$, maka $x = k_1p_1$, $y = k_2p_1$ untuk suatu $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Karena $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, maka $x, y \notin V_2$, akibatnya $p_2 \nmid x$ dan $p_2 \nmid y$. Sehingga $p_2 \nmid xy$, dengan demikian $xy = (k_1p_1)(k_2p_1) \neq 0$, dengan kata lain x dan y tidak bertetangga. Hal yang sama berlaku juga untuk setiap $x, y \in V_2$. Dengan demikian diperoleh graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf bipartit lengkap. ∎

Dari beberapa contoh di atas, dapat diketahui bahwa untuk $n = p^2$ dengan p bilangan prima, maka eksentrisitas dari setiap simpul pada graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_n$ sama yaitu 1 karena merupakan graf lengkap. Sehingga radius dan diameternya sama dengan 1. Sedangkan untuk $n = p_1p_2$ dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, diperoleh diameter dari graf pembagi nol sama dengan 2, yang dibuktikan pada teorema berikut.

Teorema 3.
Jika diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p_1p_2$, di mana p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka diameter graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ adalah 2.

Bukti:
Misalkan $n = p_1p_2$, dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\dots,p_1p_2 - 1\}$. Berdasarkan teorema 2, diperoleh graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ yaitu graf bipartit lengkap. Dengan kata lain $Z(\mathbb{Z}_n)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan yaitu V_1 dan V_2 sehingga setiap elemen V_1 bertetangga dengan setiap elemen V_2. Sehingga untuk setiap $a, b \in Z(\mathbb{Z}_n)$, jika $a \in V_1$, $b \in V_2$ atau sebaliknya, maka a terhubung langsung dengan b, akibatnya $d(a, b) = 1$. Jika $a, b \in V_1$ maka a tidak terhubung langsung dengan b, tetapi pasti ada $c \in V_2$ yang menghubungkan a dan b, akibatnya $d(a, b) = 2$, begitu pula untuk $a, b \in V_2$. Dengan demikian, diameter graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ adalah 2. ∎

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan, dapat diambil kesimpulan mengenai beberapa karakteristik graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo n sebagai berikut:

1. Jika $n = p^2, p$ bilangan prima, $p \geq 3$ maka graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ berbentuk graf lengkap.
2. Jika $n = p_1p_2$, dengan p_1, p_2 bilangan prima berbeda, maka graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf bipartit lengkap, dan diameter dari graf tersebut ialah 2.

Saran untuk penelitian selanjutnya ialah perlu dilakukan penelitian bentuk-bentuk graf pembagi nol pada gelanggang yang lebih kompleks dan juga ideal-idealnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. (2017). Radius, Diameter, Multiplisitas Sikel, dan Dimensi Metrik Graf Komuting dari Grup Dihedral. *Jurnal Matematika "Mantik", 3*(1), 1-4. doi: 10.15642/mantik.2017.3.1.1-4

Fraleigh, J. B. (2014). *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed.). United States of America: Pearson Education Limited.

Munir, Rinaldi. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika Bandung.

Nazzal, K.& Ghanem, M. (2014). Some Properties of The Zero Divisor Graph of A Commutative Ring. *Discussion Mathematicae General Algebra and Applications*, *34*(1), 167-181. doi:10.7151/dmgaa.1222

Romdhini, M. U., Irwansyah, & Switrayni, N. W. (2016). *Struktur Aljabar*.Mataram: Universitas Mataram.

Smith, J. D. H. (2016).Introduction to *Abstract Algebra* (2nd ed.). New York: CRC Press.

Wicaksono, S. A. & Soleha. (2013). Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*, *2(1)*, 1-5. doi: 2337-3520(2301-928X Print)