Sistem KENDALI

(TEORI DAN APLIKASI PADA MATLAB DAN SIMULINK)

BAGIAN 1

Dr. Ir. I Ketut Wiryajati, S.T., M.T., IPU., ASEAN.Eng.
I Nyoman Wahyu Satiawan, S.T., M.Sc., Ph.D.

SISTEM KENDALI

(TEORI DAN APLIKASI PADA MATLAB DAN SIMULINK)

BAGIAN 1

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

i. Penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. Penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

SISTEM KENDALI

(TEORI DAN APLIKASI PADA MATLAB DAN SIMULINK)

BAGIAN 1

Dr. Ir. I Ketut Wiryajati, S.T., M.T., IPU., ASEAN.Eng.
I Nyoman Wahyu Satiawan, S.T., M.Sc., Ph.D.

deepublish
Cerdas, Bahagia, Mulia, Lintas Generasi.

SISTEM KENDALI
(TEORI DAN APLIKASI PADA MATLAB DAN SIMULINK)
BAGIAN 1

I Ketut Wiryajati & I Nyoman Wahyu Satiawan

Desain Cover :
Rulie Gunadi

Sumber :
www.shutterstock.com

Tata Letak :
Amira Dzatin Nabila

Proofreader :
Mira Muarifah

Ukuran :
xiv, 208 hlm, Uk: 15.5x23 cm

ISBN :
978-623-02-3247-3 (no.jil.lengkap)
978-623-02-3248-0 (jil.1)

Cetakan Pertama :
Agustus 2021

PENERBIT DEEPUBLISH
(Grup Penerbitan CV BUDI UTAMA)
Anggota IKAPI (076/DIY/2012)
Jl.Rajawali, G. Elang 6, No 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl.Kaliurang Km.9,3 – Yogyakarta 55581
Telp/Faks: (0274) 4533427
Website: www.deepublish.co.id
www.penerbitdeepublish.com
E-mail: cs@deepublish.co.id

PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Mahakuasa, yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya, sehingga buku *Sistem Kendali* (*Teori dan Aplikasi pada MATLAB*/*Simulink*) ini dapat diselesaikan dengan baik. Pembahasan pada buku ini terdiri dari 6 bab yang merupakan penulisan bagian pertama pada buku, pada Bab 1 memaparkan landasan penggunaan MATLAB/Simulink, dasar-dasar dari transformasi Laplace, pemodelan matematika dari persamaan diferensial, pemodelan matematika dari sistem mekanik, pneumatik, elektrik, elektronika dengan menggunakan dasar-dasar rangkaian listrik, dan penyederhanaan fungsi yang sebelumnya dibahas bagaimana cara membuat diagram blok. Yang semuanya itu tergabung dalam buku tentang *Sistem Kendali* (*Teori dan Aplikasi pada MATLAB*/*Simulink*). *Sistem Kendali* (*Teori dan Aplikasi pada MATLAB*/*Simulink*) di dalam bidang *engineering* digunakan untuk mengerjakan berbagai hal memodelkan sistem, membuat desain atau rancangan dan lain-lain. Selain itu, *Sistem Kendali* (*Teori dan Aplikasi pada MATLAB*/*Simulink*) juga dapat digunakan pada rangkaian kontrol elektronik untuk mengendalikan berbagai alat.

Isi buku ini mencakup materi pokok *Sistem Kendali* (*Teori dan Aplikasi pada MATLAB/Simulink*) yakni: Bab 1 dasar-dasar menggunakan MATLAB dan Simulink, dengan menguasai ini diharapkan mahasiswa mampu menguasai teknik ini dengan baik. MATLAB dan Simulink ini dilengkapi dengan beberapa contoh yang diterapkan pada sistem kendali. Pada Bab 2 menjelaskan tentang matriks, matriks ini merupakan dasar dari perhitungan yang dapat digunakan pada sistem kendali. Pada bagian ini pula diuraikan beraneka jenis matriks dan cara operasi matriks secara teori dan praktik dengan menggunakan MATLAB. Bab 3 menjelaskan teori Laplace, pada bagian ini mahasiswa diharapkan mampu mengusai transformasi Laplace secara teori maupun praktik, latihan juga dimuat pada bab ini. Bab 4 menjelaskan bagaimana representasi matematika dari model fisik sistem elektrik dan elektronik. Elektrik mengupas rangkaian R, L, C seri maupun paralel menerapkan persamaan diferensial, transformasi Laplace serta mendapatkan fungsi alih sistem, demikian juga untuk sistem elektronik lengkap dengan simulasi dengan MATLAB. Bab 5 menguraikan representasi dari model matematika dari sistem fisik mekanik dan pneumatik secara lengkap diuraikan dengan ulasan dengan MATLAB dan Simulink. Bab 6 menguraikan dasar-dasar fungsi alih serta pengolahan bagaimana cara menyederhanakan sistem blok tersebut, semua bab diakhiri dengan latihan-latihan yang selalu diharapkan untuk dapat menjawab. Buku ini dapat digunakan sebagai salah satu literatur di bidang pengajaran dan penelitian dalam bidang teknik kendali maupun sistem yang lain.

Pada kesempatan ini penyusun menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penyusun dalam menyelesaikan buku ini. Mudah-mudahan buku ini dapat memberikan sedikit manfaat bagi para mahasiswa pada umumnya yang mengambil mata kuliah Sistem Kendali pada bidang Teknik Elektro.

Sebagai akhir kata penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang secara langsung atau tak langsung membantu terselesaikannya buku ini. Dan penulis tidak lupa mengharapkan kritik dan saran untuk membangun demi tercapainya materi dan buku yang sesuai harapan. Demikian diucapkan terima kasih.

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1

PENGENALAN MATLAB PADA SISTEM KENDALI

Setelah mempelajari bab ini pembaca akan memahami dan mengerti tentang hal-hal berikut:

1. Mengenal dan dapat mengoperasikan program **MATLAB** pada PC.
2. Memiliki keterampilan dasar menggunakan **MATLAB** untuk operasi aljabar matriks sederhana.
3. Mengenal serta mampu menggunakan *software* MATLAB dalam sistem kendali.
4. Mengenal dan dapat menyelesaikan persamaan dan menyimulasikan dalam MATLAB.
5. Mengenal dan mengetahui cara memakai Simulink.
6. Dapat menyimulasikan sebuah sistem dengan Simulink.
7. Dapat mengetahui dasar-dasar transformasi Laplace.

1.1. Pengenalan MATLAB

MATLAB adalah singkatan dari **MAT**rix **LAB**oratory, merupakan bahasa pemrograman yang dikembangkan oleh The Mathwork Inc. yang hadir dengan fungsi dan karakteristik yang berbeda dengan bahasa pemrograman lain seperti Delphi, Basic maupun C++. MATLAB merupakan bahasa pemrograman level tinggi yang dikhususkan untuk kebutuhan komputasi teknis, visualisasi dan pemrograman, komputasi matematik, analisis data, pengembangan algoritma, simulasi dan pemodelan dan grafik-grafik perhitungan. Saat ini MATLAB memiliki ratusan fungsi yang dapat digunakan sebagai alat untuk menyelesaikan persamaan di bidang teknik mulai dari masalah yang sederhana sampai masalah-masalah yang kompleks dari berbagai disiplin ilmu.

Dalam lingkungan perguruan tinggi khusus pada bidang sains dan teknik, MATLAB merupakan perangkat standar yang memperkenalkan untuk mengembangkan penyajian materi matematika, rekayasa dan keilmuan. Di industri, MATLAB merupakan perangkat pilihan untuk penelitian dengan produktivitas yang tinggi, pengembangan dan analisisnya.

Kegunaan MATLAB secara umum adalah sebagai berikut:

a) Matematika dan komputasi,
b) Perkembangan algoritma,
c) Pemodelan, simulasi, dan pembuatan prototipe,
d) Analisis data, eksplorasi dan visualisasi,
e) Pembuatan aplikasi, termasuk pembuatan antara muka secara grafis.

1.2. Karakteristik MATLAB

- Bahasa pemrogramannya didasarkan pada matriks (baris dan kolom).
- Lambat (dibandingkan dengan Fortran atau C) karena bahasanya langsung eksekusi tanpa melalui proses kompilasi.
- *Automatic memory management*, artinya kita tidak harus mendeklarasikan *arrays* terlebih dahulu.
- Pemrogramannya tersusun secara sistematis.
- Waktu pengembangannya lebih cepat dibandingkan dengan Fortran atau C.
- Dapat diubah ke bahasa C lewat MATLAB Compiler.
- Tersedia banyak *toolbox* untuk aplikasi-aplikasi khusus.

Beberapa kelebihan MATLAB jika dibandingkan dengan program lain adalah:

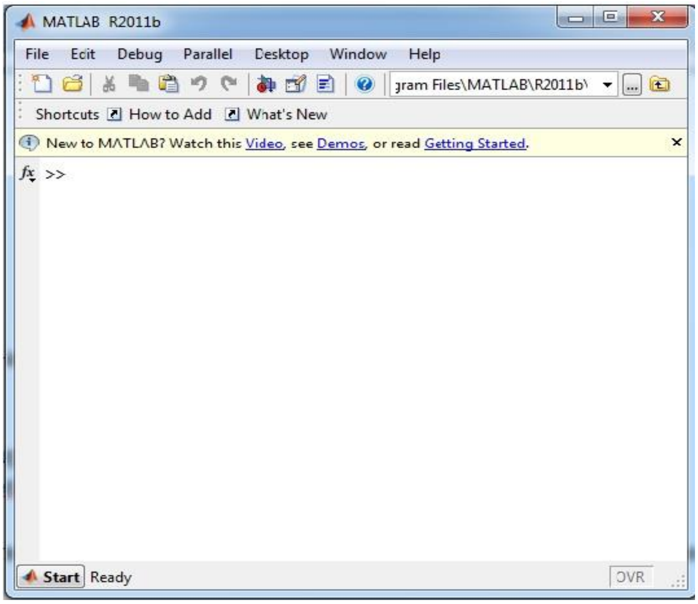
1. Mudah dalam memanipulasi struktur matriks dan perhitungan berbagai operasi matriks yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, invers dan fungsi matriks lainnya.
2. Menyediakan fasilitas untuk memplot struktur gambar (kekuatan fasilitas grafik tiga dimensi yang sangat memadai).
3. *Script* program yang dapat diubah sesuai dengan keinginan *user*.
4. Jumlah *routine-routine powerful* yang berlimpah yang terus berkembang.
5. Kemampuan *interface* (misal dengan bahasa C, *word* dan *mathematics*).
6. Dilengkapi dengan *toolbox*, Simulink, *stateflow* dan sebagainya, serta mulai melimpahnya *source code* di internet yang dibuat dalam MATLAB (contoh *toolbox* misalnya: *signal processing*, *control system*, *neural networks* dan sebagainya).

1.3. Lingkungan Kerja MATLAB

Secara umum lingkungan kerja MATLAB terdiri dari tiga bagian yang penting yaitu:

1. Command Windows

Windows ini muncul pertama kali ketika kita menjalankan program MATLAB. Command Windows digunakan untuk menjalankan perintah-perintah MATLAB, memanggil *tool* MATLAB seperti *editor*, fasilitas *help*, model Simulink, dan lain-lain. Ciri dari *windows* ini adalah adanya *prompt* (tanda lebih besar) yang menyatakan MATLAB siap menerima perintah. Perintah tersebut dapat berupa fungsi-fungsi bawaan (*toolbox*) dari MATLAB itu sendiri, Comand Window akan siap menerima perintah akan terlihat seperti pada gambar 1-1.



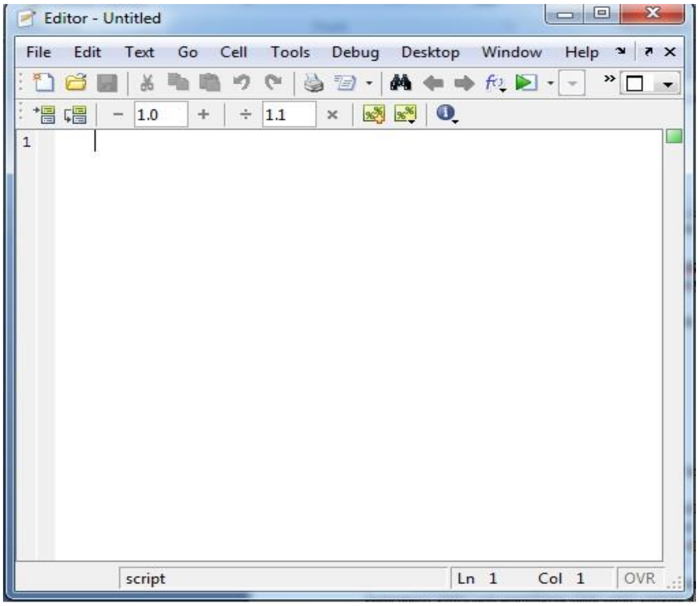
Gambar 1.1 Tampilan Windows dari MATLAB

2. Editor Windows

Untuk memulai sebuah perintah dari MATLAB Anda harus masuk dalam menu seperti pada gambar di bawah ini dengan cara memilih **File** pilih dan pilih **Edit** pilih **Script** dan klik kiri selanjutnya tampil seperti pada gambar di bawah dan siap untuk menuliskan *script-script* yang diinginkan. Windows ini merupakan *tool* yang disediakan oleh MATLAB yang berfungsi sebagai editor *script* MATLAB (*listing* perintah-perintah yang harus dilakukan oleh MATLAB). Ada dua cara untuk membuka editor ini, yaitu:

1. Klik: **File**, lalu New dan kemudian M-File
2. Ketik pada Command Windows: "**Edi**t" atau **Ctrl+N**

Secara formal suatu *script* merupakan suatu *file* eksternal yang berisi tulisan perintah MATLAB. Tetapi *script* tersebut bukan merupakan suatu fungsi. Ketika Anda menjalankan suatu *script*, perintah di dalamnya dieksekusi seperti ketika dimasukkan langsung pada MATLAB melalui *keyboard*.

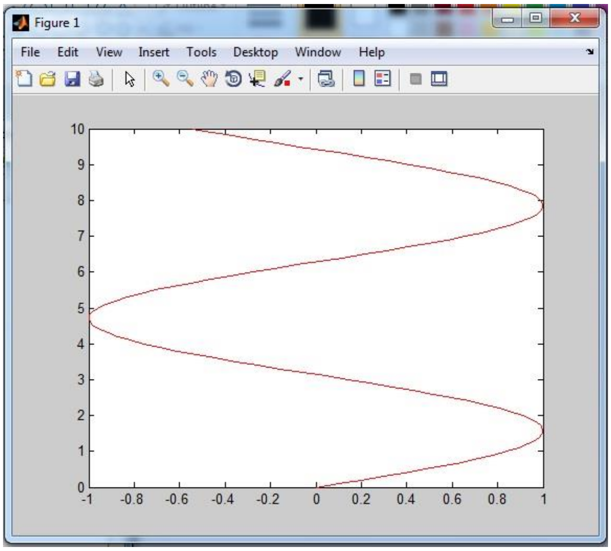


Gambar 1.2 Tampilan Editor dari Windows dari MATLAB

M-file selain dipakai sebagai penamaan *file* juga bisa dipakai untuk menamakan fungsi, sehingga fungsi-fungsi yang kita buat di jendela editor bisa disimpan dengan ekstensi .m sama dengan *file* yang kita panggil di jendela editor. Saat kita menggunakan fungsi MATLAB seperti inv, abs, cos, sin dan sqrt, MATLAB menerima variabel berdasarkan variabel yang kita berikan. Fungsi M-file mirip dengan script file di mana keduanya merupakan *file* teks dengan ekstensi ".m". sebagaimana script M-file, fungsi m-file tidak dimasukkan dalam jendela Command Window tetapi *file* tersendiri yang dibuat dengan editor teks.

3. Figure Windows

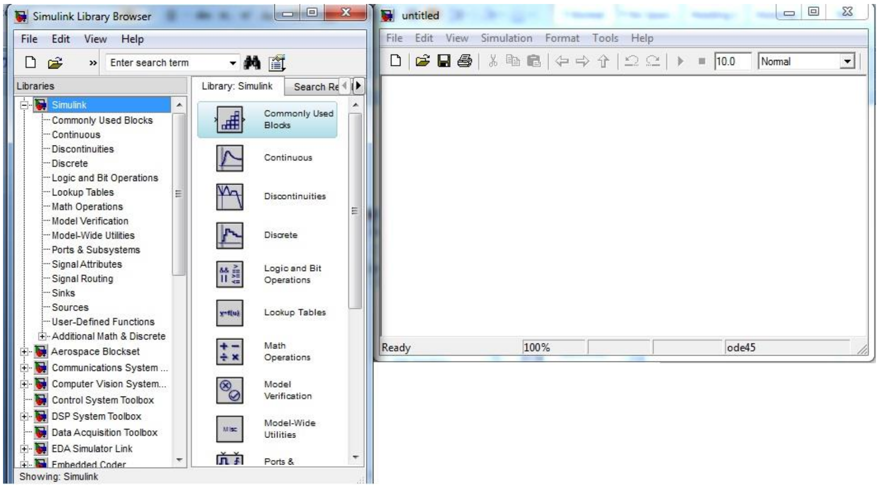
Windows ini merupakan hasil visualisasi dari *script* MATLAB. MATLAB memberikan kemudahan bagi *programmer* untuk mengedit windows ini sekaligus memberikan program khusus untuk itu, sehingga selain berfungsi sebagai visualisasi output yang berupa grafik juga sekaligus menjadi media input yang interaktif.



Gambar 1.3 Tampilan Figure Windows dari MATLAB

4. Simulink Windows

Windows ini umumnya digunakan untuk menyimulasikan sistem kendali berdasarkan blok diagram yang telah diketahui. Untuk mengoperasikannya ketik "**simulink**" pada Command Windows. Atau dengan klik pada *icon*  tunggu beberapa saat dan klik **File** selanjutnya klik **New** maka muncul tampilan seperti pada gambar di bawah, dan Simulink siap untuk menerima perintah kerja selanjutnya lebih detail akan dibahas pada bab berikutnya dengan contoh kasus.



Gambar 1.4 Tampilan Simulink Windows dari MATLAB

1.4. Karakter Spesial MATLAB

Tanda % merupakan penanda komentar. Keterangan setelah tanda tersebut akan diabaikan dalam proses perhitungan.

Contoh:

```
>>y = 2:2:8 % y = [2468];
>>y = 2.00 4.00 6.00 8.00
```

Tanda ; merupakan perintah pembatas yang tidak ditampilkan di jendela kerja, tanda ini juga berarti sebagai n pemisah kolom dan baris dalam matriks.

Contoh:

```
>>A = [1 3 5 ; 5 3 1];
```

Tanda: merupakan pembatas jangkauan atau sering juga disebut dengan *increment*, contohnya:

```
>>B = [0:2:8]
>>B = 0.00 2.00 4.00 6.00 8.00
```

Tanda ` merupakan *transpose* matriks yang merupakan suatu *vector* kolom

```
>>X = [3 2 4 5;7 6 5 8]
>>X = 3.00 2.00 4.00 5.00
   7.00 6.00 5.00 8.00
>>X=X`
>>X= 3.00 7.00
   2.00 6.00
   4.00 5.00
   5.00 8.00
```

Tanda ... digunakan untuk menuliskan baris perintah yang panjang contohnya:

```
>>P=sin(1)-sin(2)+sin(3)-sin(4)+sin(5)+cos(6)+...cos(7)cos(8)+cos(9)-
cos(10)+cos(11)+cos(12)
>>P = 1.0273
```

Contoh dan fungsi kode yang dapat diketik pada Command Windows:

```
>> help           % Menunjukkan semua help topic di MATLAB.
>> what general   % Menunjukkan instruksi-instruksi yang tersedia di direktori
                    general, salah satunya adalah instruksi clear
>> help general   % Menunjukkan instruksi-instruksi yang tersedia di direktori
                    general, dan fungsinya secara umum.
>> help clear     % Menunjukkan penjelasan detail untuk instruksi clear.
                    (Fungsinya untuk apa, syntax-nya untuk apa, fungsi
                    lain yang terkait apa)
>> help ops       % Menunjukkan penulisan operator2 di dalam MATLAB
>> clc            % Digunakan untuk membersihkan layar, tetapi nilai variabel
                    yang tersimpan di memori tidak akan hilang sehingga
                    dapat ditampilkan kembali ke layer dengan memanggil
                    nama variabelnya
>> clear          % digunakan untuk membersihkan layer sekaligus
                    menghapus variabel dari memori sehingga kita tidak
                    dapat menampilkan nilai variabel ke layer. (muncul
                    pesan ??? Undefined function or variable 'x'.)
>> clc            %
>> x=4;
>> y=5;
>> z=x+y;
>> z              %Merupakan contoh barisan instruksi untuk melakukan
                    penjumlahan antara variabel x dan variabel y yang
                    hasilnya disimpan dalam variabel z.
```

1.5. Angka dan Operasi Aritmatika

Ada tiga jenis angka di MATLAB yaitu:

1. Bilangan bulat, yaitu bilangan yang tidak mengandung desimal.

Contohnya:

```
>> xi = 10
```

2. Bilangan real, yaitu bilangan yang mengandung desimal contohnya:

```
n>> xr = 12.6054
>> realmax % batas atas bilangan real di MATLAB
ans = 1.7977e+308
>> realmin % batas minimum bilangan real di MATLAB
ans = 2.2251e-308
```

3. Bilangan kompleks

```
>> i
ans = 0 + 1.0000i
>> x = 1 + sqrt(3)*i
x = 1.0000 + 1.7321i
>> A= [1 j;-j*5 2]
A= 1.0000 0 + 1.0000i
0 - 5.0000i 2.0000
```

Beberapa penggunaan operator aritmatika antara dua operand (A dan B) ditunjukkan pada tabel berikut ini:

Tabel 1.1 Operator Matematika MATLAB

Operasi	Simbol
Penambahan	+
Pengurangan	-
Perkalian	*
Pembagian	/ atau \
perpangkatan	^

1.6. Variabel pada MATLAB

MATLAB memiliki tiga variabel sebagai *nonnumbers* yaitu:

1. -Inf (Negative Infinity)
2. Inf (Infinity)
3. Nan (Not a Number)

MATLAB hanya memiliki dua jenis tipe data yaitu *Numeric* dan *String*. Dalam MATLAB setiap variabel akan disimpan dalam bentuk matriks. *User* dapat langsung menuliskan variabel baru tanpa harus mendeklarasikannya terlebih dahulu pada Command Window.

Contoh pembuatan variabel pada MATLAB:

```
>> VarA=1000
VarA =
    1000
>> VarB=[1 3 2 5 6 7]
VarB =
   1    3    2    5    6    7
>> VarC='Wiryajati'
VarC =
Wiryajati
```

Penamaan variabel pada MATLAB bersifat *case sensitive* karena itu perlu diperhatikan penggunaan huruf besar dan kecil pada penamaan variabel. Apabila terdapat variabel lama dengan nama yang sama maka MATLAB secara otomatis akan me-*replace* variabel lama tersebut dengan variabel baru yang dibuat *user*.

1.7. Fungsi Pemrograman dalam MATLAB

1.7.1. Fungsi Dasar

1.7.1.1. Fungsi Matematika Dasar

Tabel 1.2 Fungsi Matematika Dasar

Fungsi	Keterangan
`abs`	Menghitung nilai absolut
`exp`	Memperoleh nilai dari e pangkat bilangan tertentu (e = 2.718282)
`log`	Menghitung logaritma natural (ln) suatu bilangan
`sqrt`	Menghitung akar pangkat 2 dari suatu bilangan
`ceil`	Membulatkan bilangan ke bilangan bulat terdekat menuju plus tak berhingga.
`fix`	Membulatkan bilangan ke bilangan bulat terdekat menuju nol.
`floor`	Membulatkan bilangan ke bilangan bulat terdekat menuju minus tak berhingga.
`gcd`	Menghitung nilai faktor pembagi terbesar
`isprime`	Menghasilkan true jika merupakan bilangan prima.
`log10`	Menghitung logaritma suatu bilangan untuk dasar 10.
`mod`	Menghitung nilai modulus.
`primes`	Menghasilkan daftar bilangan.
`rem`	Menghitung nilai *remainder*.
`round`	Membulatkan bilangan ke bilangan bulat terdekat.

1.7.1.2. Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri banyak digunakan terkait dengan sudut. Nilai perhitungan yang dalam fungsi trigonometri sudut dalam *radian*.

Tabel 1.3 Fungsi Trigonometri

Fungsi	Keterangan
`sin`	Menghitung sinus suatu bilangan, di mana bilangan dalam radian.
`cos`	Menghitung cosinus suatu bilangan, di mana bilangan dalam radian.
`tan`	Menghitung tangen suatu bilangan, di mana bilangan dalam radian.
`acos`	Menghitung arccosinus (invers cos) suatu bilangan yang menghasilkan sudut dalam radian, di mana bilangan harus antara -1 dan 1.
`asin`	Menghitung arcsinus suatu bilangan yang menghasilkan sudut dalam

Fungsi	Keterangan
	radian, di mana bilangan harus antara -1 dan 1.
`atan`	Menghitung arctangen suatu bilangan yang menghasilkan sudut dalam radian.
`cosh`	Menghitung cosinus hiperbolik dari suatu sudut dalam radian.
`sinh`	Menghitung sinus hiperbolik dari suatu sudut dalam radian.
`tanh`	Menghitung tangen hiperbolik dari suatu sudut dalam radian.
`cosd`	Menghitung cosinus suatu bilangan, di mana bilangan dalam derajat.
`sind`	Menghitung sinus suatu bilangan, di mana bilangan dalam derajat.
`tan`	Menghitung tangen suatu bilangan, di mana bilangan dalam derajat.
`sec`	Menghitung suatu sec bilangan, di mana bilangan dalam radian.
`csc`	Menghitung suatu cosec bilangan, di mana bilangan dalam radian.
`cot`	Menghitung cotan suatu bilangan, di mana bilangan dalam radian.

1.7.1.3. Fungsi Analisis Data

MATLAB menyediakan sejumlah fungsi penting untuk digunakan dalam menganalisis data, antara lain ditunjukkan pada Tabel 1.4

Tabel 1.4 Fungsi Analisis Data

Fungsi	Keterangan
`max`	Menghasilkan nilai terbesar dari suatu vektor atau matriks
`min`	Menghasilkan nilai terbesar dari suatu vektor atau matriks
`mean`	Menghasilkan nilai rerata
`dll`	.....

1.8. Vektor dan Matriks dalam MATLAB

1.8.1. Vektor

Vektor adalah besaran yang mempunyai besaran atau nilai serta arah,

<u>Vektor baris:</u>

```
>> v = [-2 sin(45) 4 6]
v =
-2.0000 0.8509 4.0000 6.0000
```

```
>> length(v) % menghitung panjang vektor
ans =
3
```

Vektor kolom:

```
>> x = [6; 5 ; 9]
>>x =
      6
      5
      9
```

1.8.2. Matriks

Dapat diasumsikan bahwa di dalam MATLAB setiap data akan disimpan dalam bentuk matriks. Dalam membuat suatu data matriks pada MATLAB, setiap isi data harus dimulai dari kurung siku ‘[‘ dan diakhiri dengan kurung siku tutup ‘]’. Untuk membuat variabel dengan data yang terdiri beberapa baris, gunakan tanda ‘titik koma’ (;) untuk memisahkan data tiap barisnya.

MATLAB menyediakan beberapa fungsi yang dapat kita gunakan untuk menghasilkan bentuk-bentuk matriks yang diinginkan. Fungsi-fungsi tersebut antara lain:

- `zeros` : untuk membuat matriks yang semua datanya bernilai 0
- `ones` : matriks yang semua datanya bernilai 1
- `rand` : matriks dengan data random dengan menggunakan distribusi uniform
- `randn` : matris dengan data random dengan menggunakan distribusi normal
- `eye` : untuk menghasilkan matriks identitas

Cara Menginputkan Matriks.
Contoh:

Matriks A=

Ada 4 cara untuk menginputkan matriks yakni:

Cara 1:

```
>>a=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
```

Cara 2:

```
>>a=[1 2 3] enter
>>4 5 6 enter
>>7 8 9];enter
```

Cara 3:

```
>>a1=[1 2 3];
>>a2=[4 5 6];
>>a3=[7 8 9];
>>a=[a1;a2;a3;];
>>a
```

Cara 4:

```
>>a=input('Masukkan matrik= ');
>>Masukkan matrik=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
>>disp(a)
```

1.8.2.1. Operasi dan Fungsi pada Matriks

MATLAB menyediakan operasi dan fungsi yang dapat digunakan operasi perhitungan maupun operasi logika, beberapa operasi dan logika dapat disajikan pada tabel berikut:

Tabel 1.5 Operasi dan Fungsi pada Matriks yang Sering digunakan

Perintah	Keterangan	Contoh
`det`	Menghasilkan determinan matriks	Det(A)
`size`	Menghasilkan ukuran matriks	Size(A)
`+`	Menjumlahkan matriks	C = A + B
`*`	Mengalikan matriks	C = A * B
`.*`	Mengalikan elemen dengan elemen, dengan ketentuan memiliki ukuran yang sama	C = A .* B
`^`	Memangkatkan matriks dengan suatu skalar	C = A^ k
`.^`	Memangkatkan elemen per elemen matriks dengan skalar	C = A .^ k
`′`	*Transpose* matriks	A’
`./`	Membagi elemen per elemen dengan ketentuan memiliki ukuran yang sama	C = A ./ B
`\`	Menghasilkan solusi AX = B	C = A \ B
`/`	Menghasilkan solusi XA = B	C = A / B
`inv`	Menghasilkan invers matriks dengan ketentuan matriks merupakan matriks bujur sangkar	C = Inv(A)

1.9. Grafik MATLAB

1.9.1. Grafik 2 Dimensi

MATLAB menyediakan fasilitas dalam pembuatan suatu grafik dengan sangat sempurna dan mudah untuk digunakan, ini merupakan salah keistimewaan MATLAB, sehingga sangat cocok digunakan untuk komputasi teknik. Ada beberapa cara untuk menampilkan grafik hasil dari suatu persamaan. Perintah atau instruksi tersebut adalah sebagai berikut:

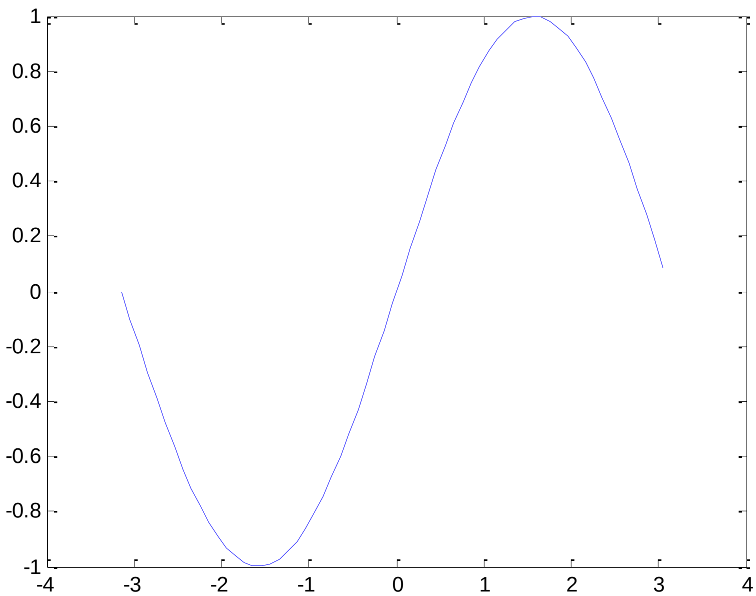
plot : *Menggambar linier*
loglog : *Menggambar dengan skala loglog*
semilogx : *Menggambar dengan skala semi log*

semilogy : *Menggambar dengan skala semilog*

Contoh 1.1 *script* untuk menampilkan grafik sinus(t) dalam bidang x dengan batas –phi sampai phi dengan *increment* 0.1.

```
x = -pi:.1:pi;
y = sin(x);
plot(x,y)
```

Hasilnya sebagai berikut;

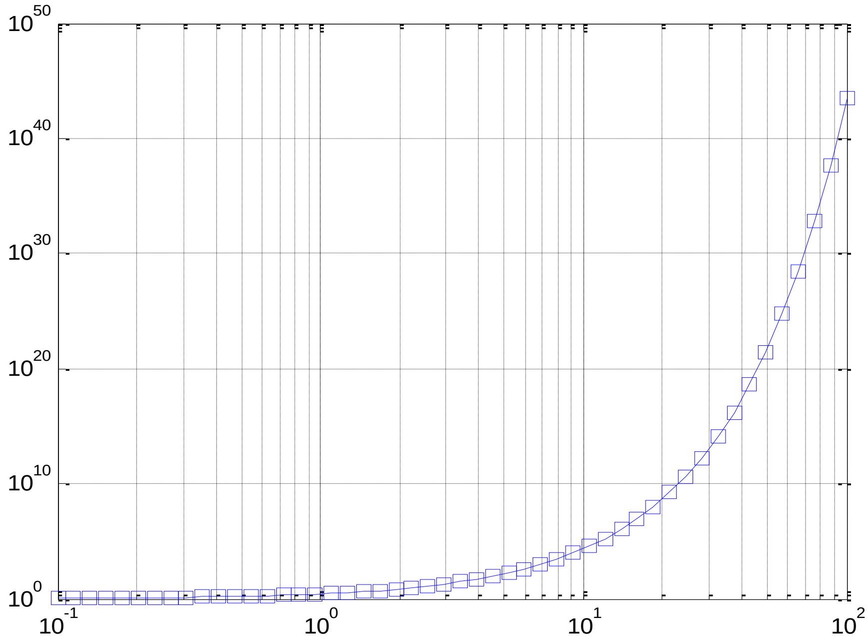


Gambar 1.5 Hasil Plot dari Sinus dengan Batas –Pi (-3.14) sampai dengan Pi (3.14)

Contoh 1.2 *Script* untuk Menampilkan Grafik Log-Log dalam Bidang X.

```
x = logspace(-1,2);
loglog(x,exp(x),'-s')
grid on
```

Hasilnya sebagai berikut;

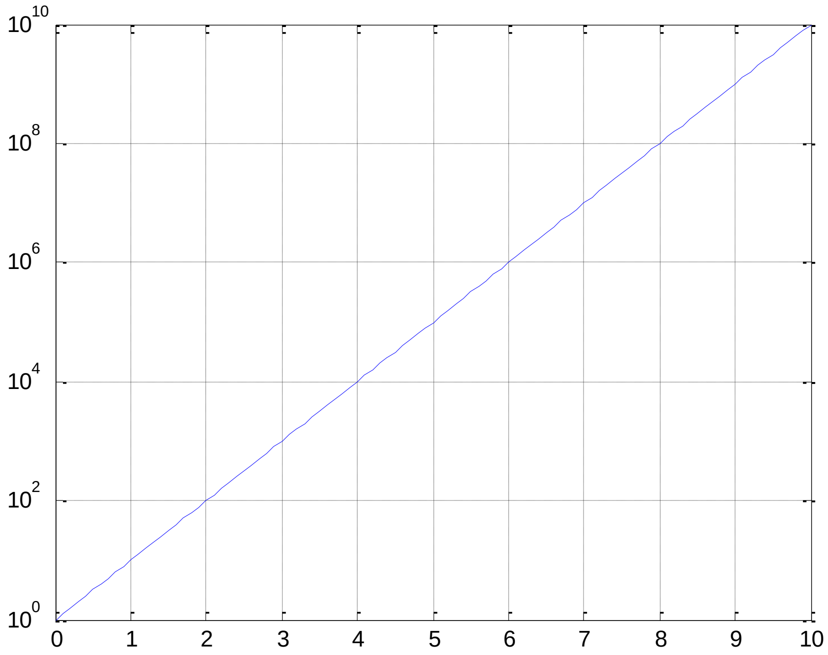


Gambar 1.6 Hasil Plot Log-Log dengan Batas -1 Sampai 2

Contoh 1.3 *Script* untuk Menampilkan Grafik Semilogy dalam Bidang Y.

```
x = 0:.1:10;
semilogy(x,10.^x)
grid on;
```

hasilnya sebagai berikut;



Gambar 1.7 Hasil Plot *Semilogy*

Untuk judul, label, garis sumbu dan teks perintah yang digunakan adalah sebagai berikut:

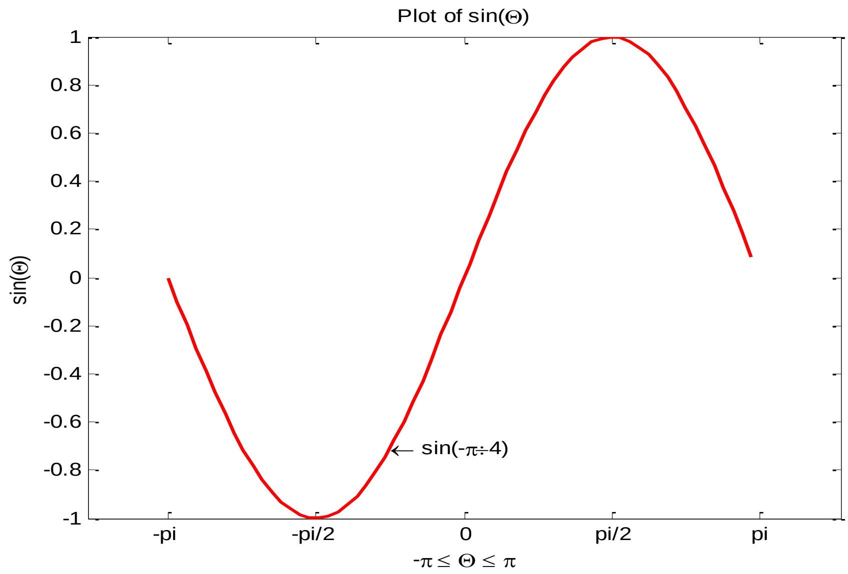
title : *judul grafik*
xlabel : *label sumbu x*
ylabel : *label sumbu y*
text : *teks keterangan*
gtext : *tempat teks diletakkan*
grid : *grid line*
axis : *batas sumbu y dan x*

Perintah yang digunakan untuk membuat grafik linier, plot (x,y) ini untuk menggambar bidang *vector* x dan *vector* y. Jika x atau y adalah sebuah matriks maka mereka akan saling menggambarkan sesuai dengan baris dan kolomnya masing-masing. Tetapi bila x adalah sebuah besaran *scalar* sedangkan y adalah besaran *vector* maka akan terjadi titik yang tidak terhubung pada plot. Berbagai macam jenis garis, *symbol plot* dan warna dapat dibuat dengan perintah plot(x,y,s) di mana s adalah karakter *string* yang dibuat dari salah satu atau lebih dari *statement* di bawah ini

Contoh 1.3 *Script* untuk Menampilkan Judul Grafik

```
%\\contoh program untuk menampilkan grafik sinus dengan judul
x = -pi:.1:pi;
y = sin(x);
p = plot(x,y)
set(gca,'XTick',-pi:pi/2:pi)
set(gca,'XTickLabel',{'-pi','-pi/2','0','pi/2','pi'})
xlabel('-\pi \leq \Theta \leq \pi')
ylabel('sin(\Theta)')
title('Plot of sin(\Theta)')
% \Theta tampak seperti symbol
% Notasi pada titik (-pi/4, sin(-pi/4))
text(-pi/4,sin(-pi/4),'\leftarrow sin(-\pi\div4)',...
   'HorizontalAlignment','left')
% Merubah warna garis menjadi warna merah
% mengatur tebal garis dengan dua titik
set(p,'Color','red','LineWidth',2)
```

Hasilnya sebagai berikut;



Gambar 1.8 Hasil Plot Grafik Sinus dengan Judul

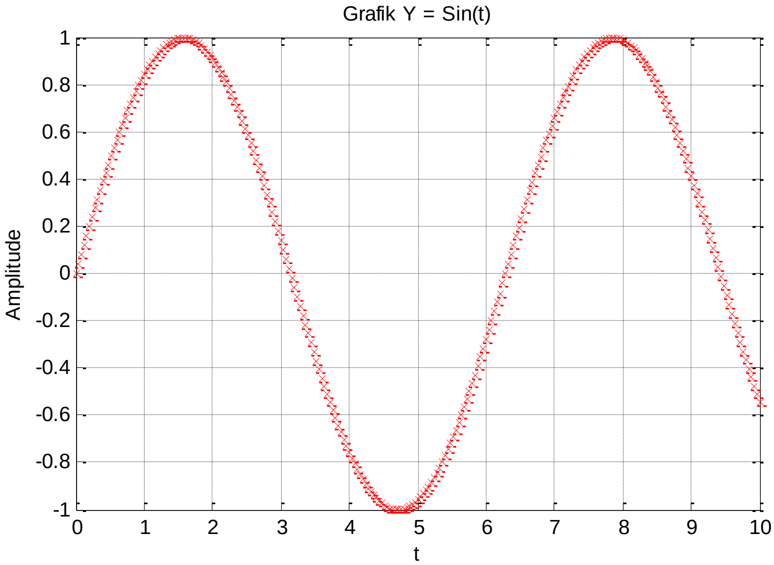
Tabel 1.6 Tabel Spesifikasi Warna dan Jenis Gambar pada MATLAB.

SPESIFIKASI WARNA		JENIS GARIS	
WARNA	**ISTILAH**	**JENIS**	**SIMBOL**
Hitam	k	Solid	-
Biru	b	Dashed	--
Cyan	c	Dotted	:
Hijau	g	Dash-dot	-.
Magenta	m	Point	.
Merah	r	Circle	o
Putih	w	X-mark	x
Kuning	y	Plus Star	+ *

Contoh 1.4: *Script* untuk Menampilkan Grafik Sinus (t) dalam Bidang

```
>>n = 25
>>t = 0: 1/n: 10
>>y = sin(t);
>>plot (t,y,'rx')
>>title ('Grafik Y = Sin(t)
>>grid
>>xlabel('t'), ylabel('Amplitude')
```

hasilnya sebagai berikut;

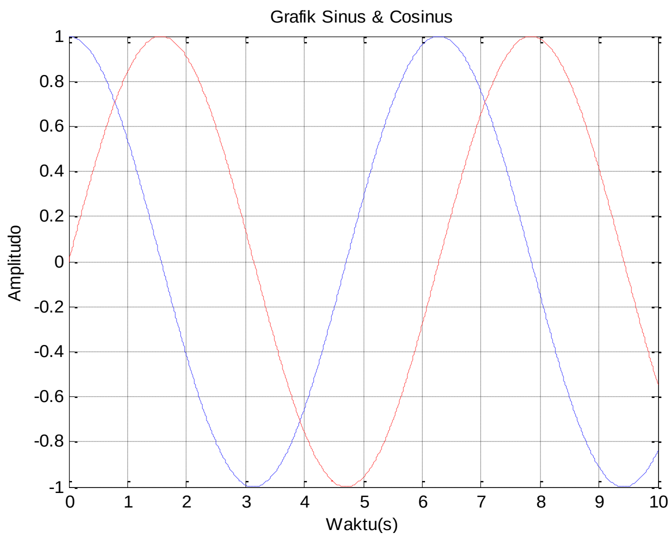


Gambar 1.9 Hasil Plot MATLAB Menampilkan 1 (satu) Grafik Sinus (t) dalam 1 (Satu) Bidang

Contoh 1.5: *Script* untuk Menampilkan 2 (Dua) Grafik Sinus (t) dalam 1 (Satu) Bidang

```
t= [0:0.01:10];
x = cos(t);
y = sin (t);
plot(t,x,'b--')
hold on
plot(t,y,'r--')
hold on
xlabel('Waktu(s)')
ylabel('Amplitudo')
grid
title('Grafik Sinus & Cosinus')
```

hasilnya adalah sebagai berikut:

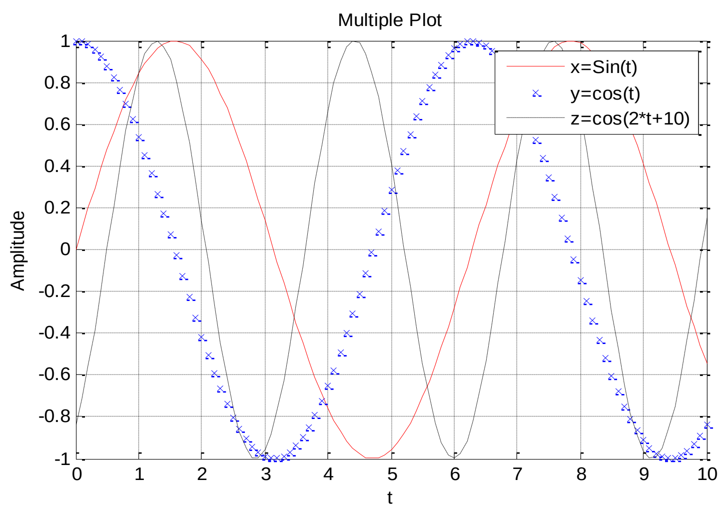


Gambar 1.10 Hasil Plot MATLAB Menampilkan 2 Grafik Sinus (t) dalam 1 Bidang

Contoh 1.6: *Script* untuk Menampilkan 3 Grafik Sinus (t) dalam 1 Bidang

```
t=0:0.1:10;
 x=sin(t);
 y=cos(t);
 z=cos(2*t+10);
 plot(t,x,'r-')
 hold on
 plot(t,y,'bx')
 hold on
 plot(t,z,'k--')
 title('Multiple Plot')
 xlabel('t'),ylabel('Amplitude')
 grid on
 legend('x=Sin(t)',...
 'y=cos(t)','z=cos(2*t+10)')
 hold off
```

hasilnya sebagai berikut:

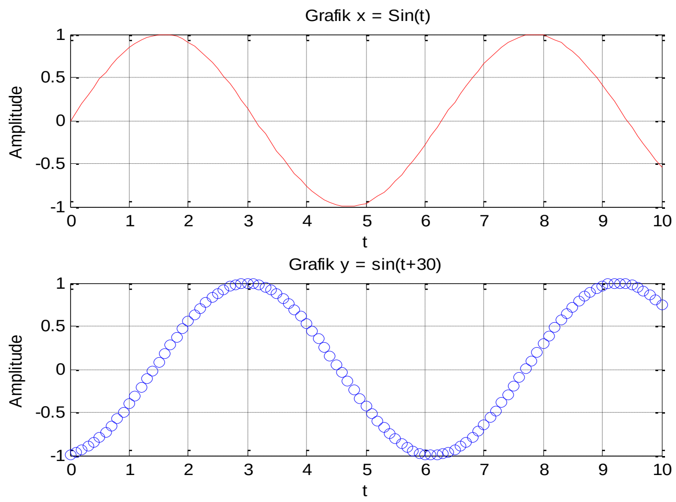


Gambar 1.11 Hasil Plot MATLAB Menampilkan 3 Grafik dalam 2 Bidang (Terpisah)

Contoh 1.7: Menampilkan 2 Grafik dalam 2 Bidang (Terpisah)

```
t=0:0.1:10;
x=sin(t);
y=sin(t+30);
subplot(2,1,1)
plot(t,x,'r-')
grid on
xlabel('t'),ylabel('Amplitude')
title(' Grafik x = Sin(t)')
subplot(2,1,2)
plot(t,y,'bo')
grid on
xlabel('t'),ylabel('Amplitude')
grid on
title('Grafik y = sin(t+30)')
hold off
```

Hasilnya sebagai berikut:



Gambar 1.12 Hasil Plot MATLAB Menampilkan 2 Grafik dalam 2 Bidang (Terpisah)

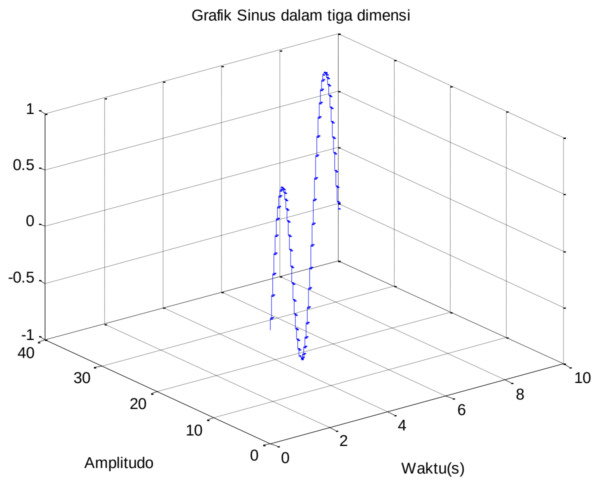
1.9.2. Grafik 3 Dimensi

MATLAB mempunyai beberapa fungsi tersendiri untuk memplot 3-D object. Fungsi-fungsi tersebut adalah plot kurva di ruangan **(plot3)**, *mesh surfaces* **(mesh)**, *surfaces* **(surf)** dan plot kontur **(countour)**. Juga ada dua fungsi untuk memplot permukaan yang khusus, **sphere** dan **cylinder**. Untuk lebih mengetahui 3-D graphic, ketikkan **help graph3d** Command Window.

Contoh 1.8: *Script* untuk Menampilkan Grafik Sinus Tiga Dimensi

```
t= [0:0.01:10];
plot3(t,4*t,sin(t))
grid
xlabel('Waktu(s)')
ylabel('Amplitudo')
title('Grafik Sinus dalam tiga dimensi ')
```

hasilnya sebagai berikut;

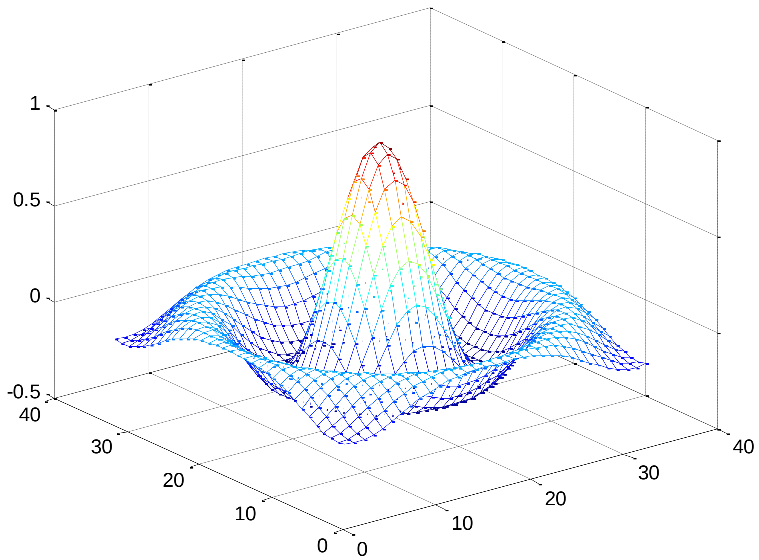


Gambar 1.13 Hasil Plot MATLAB Menampilkan Grafik 3 Dimensi dalam 1 Bidang

Contoh 1.9: *Script* untuk Menampilkan Grafik Tiga Dimensi

```
figure;
[X,Y] = meshgrid(-8:.5:8);
R = sqrt(X.^2 + Y.^2) + eps;
Z = sin(R)./R;
mesh(Z);
```

Hasilnya sebagai berikut:

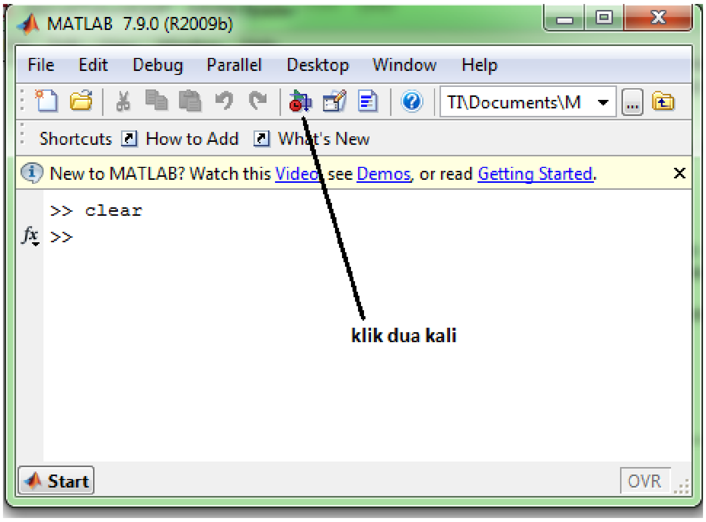


Gambar 1.14 Hasil Plot MATLAB Menampilkan Grafik 3 Dimensi dalam 1 Bidang

1.10. Dasar-Dasar Simulink pada MATLAB

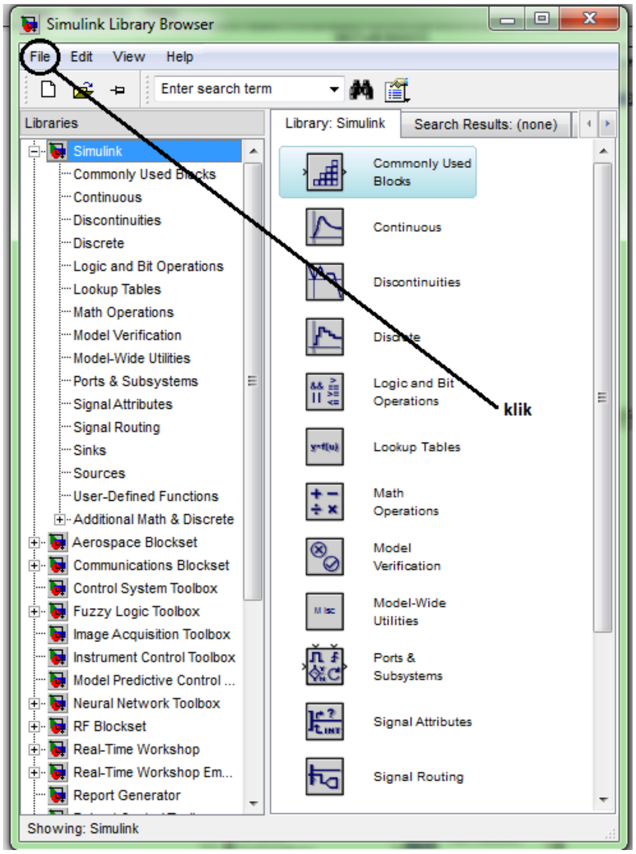
Simulink adalah paket perangkat lunak berbasis waktu yang termasuk dalam Matlab dan tugas utamanya adalah untuk memecahkan numerik Persamaan Diferensial Biasa (PDB). Kebutuhan untuk menyelesaikan persamaan numeriknya berasal dari fakta bahwa tidak ada solusi analitis untuk semua persamaan diferensial, terutama bagi persamaan yang nonlinier. Seluruh ide adalah untuk memecahkan persamaan diferensial biasa menjadi segmen waktu kecil dan menghitung solusi numerik untuk hanya segmen kecil. Panjang setiap segmen disebut “ukuran langkah”. Karena metode numerik dan tidak analitis maka akan ada kesalahan dalam solusi. Kesalahan tersebut tergantung pada metode dan ukuran langkah (biasanya dilambangkan dengan h).

Langkah-langkah penggunaan Simulink sebagai berikut: untuk memulai Simulink klik simbol Simulink pada jendela perintah seperti pada gambar berikut:



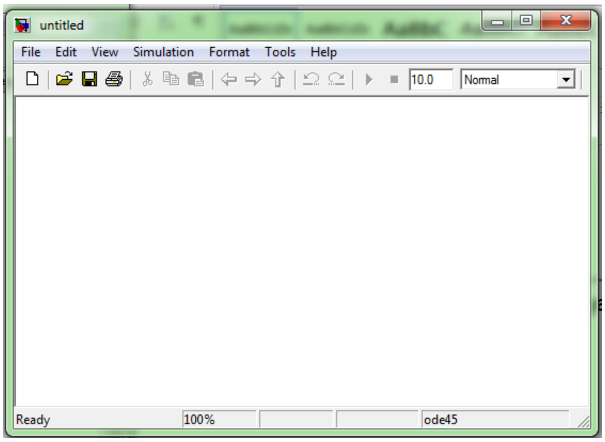
Gambar 1.15 Jendela Kerja MATLAB

Beberapa saat akan muncul jendela kerja Simulink sebagai berikut:



Gambar 1.16 Pustaka Simulink

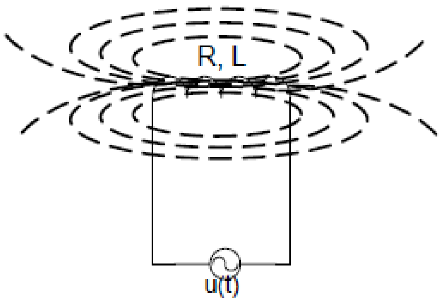
Ini adalah pustaka Simulink. Seperti dapat dilihat ada beberapa sub-pustaka. Agar dapat menemukan blok yang sesuai Anda mencari di pustaka tersebut. Untuk membuka jendela kerja Simulink baru klik **File** kemudian arahkan ke **new** kemudian **new model** (**Ctrl+N**) selanjutnya akan terlihat jendela kerja baru seperti pada gambar berikut:



Gambar 1.17 Jendela Kerja Simulink yang Siap Diisi

Dengan cara memblok dan menarik kemudian diletakkan pada jendela kerja Simulink baru untuk lebih jelas perhatikan contoh- contoh berikut:

Contoh 1.10. jika diketahui sebuah persamaan dari sebuah medan magnet seperti gambar berikut. Persamaan tegangan pada rangkaian ini adalah: $(t) = i(t)R + \frac{d\varphi(t)}{dt}$, Anggap induktansi dari koil tersebut adalah konstant.



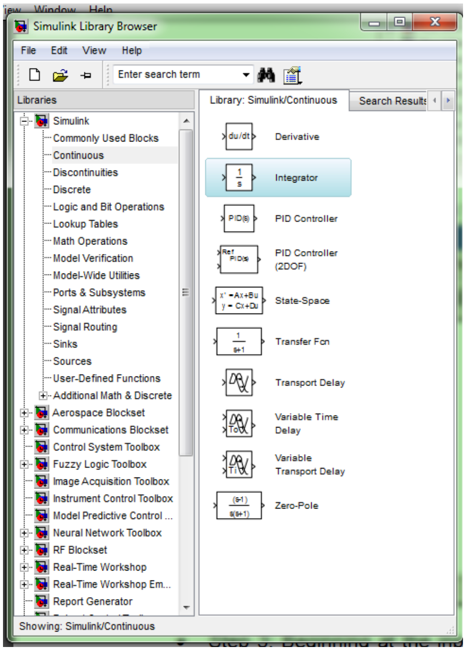
Gambar 1.18 Rangkaian Listrik dengan RL

Jawaban:

Karena induktansi dianggap konstan maka persamaan tegangan menjadi $(t) = i(t)R + \frac{di(t)}{dt}$ ini adalah persamaan diferensial biasa, dan dianggap kondisi awal adalah nol (dapat diselesaikan dengan persamaan Laplace). Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan dengan Simulink sebagai berikut:

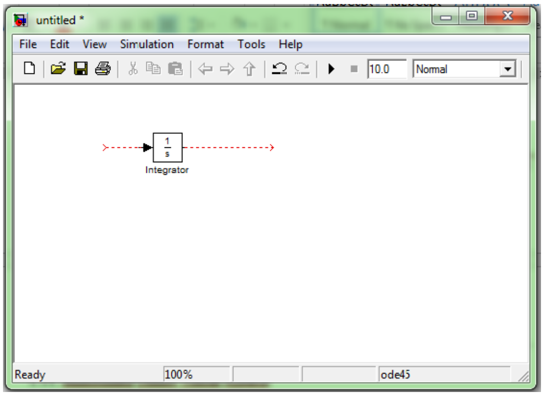
Langkah pertama, pertama-tama manipulasi persamaan tersebut menjadi persamaan diferensial seperti berikut: $\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}(u(t) - i(t)R$

Langkah kedua, kita dapat menggunakan persamaan integrasi dari persamaan diferensial tersebut dengan menggunakan blok Simulink berikut: setelah membuka jendela kerja baru pada Simulink klik dan tempelkan pada jendela kerja:



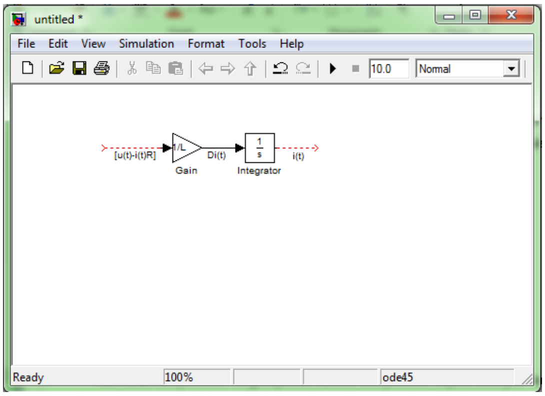
Gambar 1.19 Jendela Kerja Simulink dengan Blok Pustaka

Sorot dan tempel pada jendela kerja baru



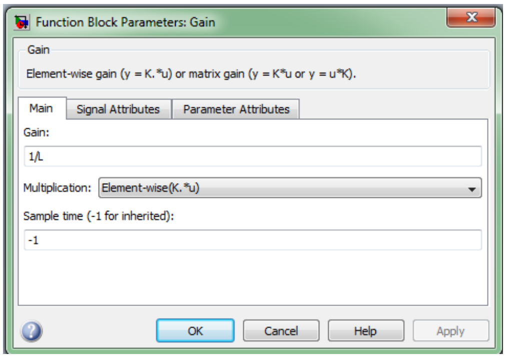
Gambar 1.20 Jendela Kerja Simulink dengan Blok Integrator

Langkah Ketiga, Memulai masukan input pada integrator dengan melihat persamaan langkah pertama $\frac{1}{L}(u(t) - i(t)R$ adalah sama dengan $Di(t)$, pertama-tama letakan penguatan senilai 1/L perhatikan gambar berikut:



Gambar 1.21 Jendela Kerja Simulink dengan Blok Integrator dan *Gain*

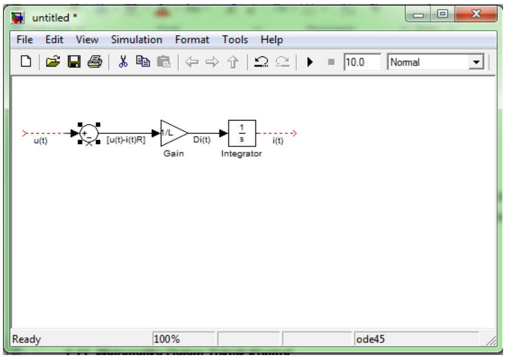
Untuk mengatur nilai dari peruatan pada blok adalah dengan cara klik dua kali pada blok tersebut sehingga tampil seperti pada gambar berikut:



Gambar 1.22 Blok Fungsi dengan Perubahan Parameter

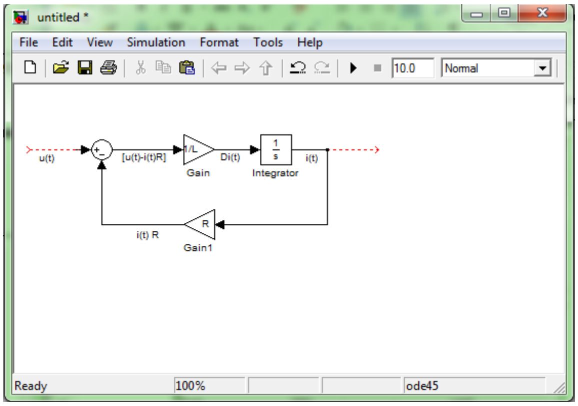
Isi parameter penguatan tersebut dengan 1/L.

Langkah Keempat, Berikutnya adalah merancang persamaan $[(u(t) - i(t)R]$, dari persamaan ini kita memerlukan blok sum (penjumlahan) klik pada pustaka Simulink salin dan tempel, setelah mengatur parameter dari penjumlahan menjadi pengurangan sehingga:



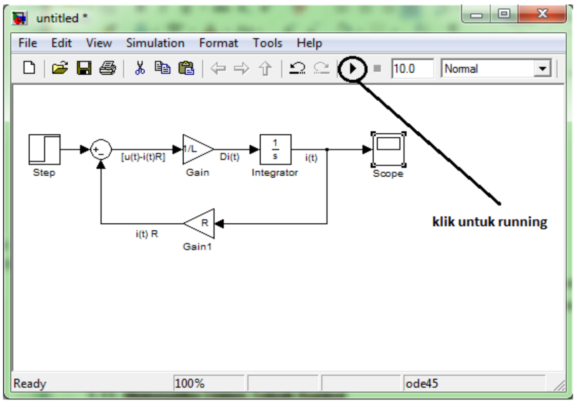
Gambar 1.23 Blok Fungsi dengan Tambahan Blok Penjumlah

Selanjutnya hubungkan dengan i(t) sesuai dengan persamaan sehingga menjadi berikut:



Gambar 1.24 Blok Fungsi Sistem Sebelum Ada Input dan Pengukuran

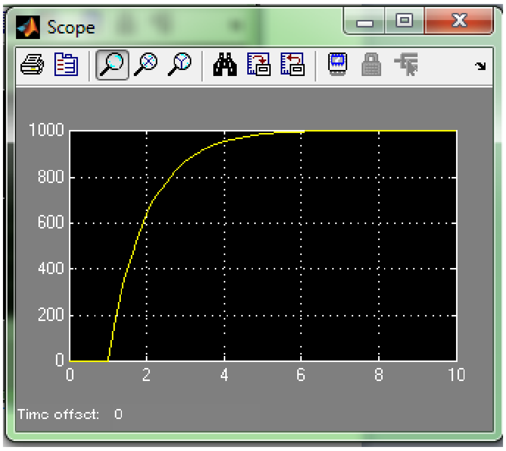
Langkah kelima, kita harus memberikan masukan sinyal untuk menyimulasikan dan untuk melihat keluaran kita pasangkan Scope semua itu dapat diambil pada pustaka Simulink sehingga menjadi berikut:



Gambar 1.25 Blok Fungsi Sistem Lengkap

Langkah keenam, sebelum menyimulasikan masukan nilai R dan L pada jendela kerja MATLAB dengan cara mengetik nilai R=0.001 dan L=0.001: klik run untuk menyimulasikan.

Langkah ketujuh, untuk melihat hasil simulasi klik dua kali pada Scope



Gambar 1.26 Sinyal Keluaran pada Osiloskop

Selanjutnya lakukan analisis seperti pada bab-bab berikutnya.

1.11. Matematika dalam Teknik Kontrol

1.11.1. Fungsi Polinomial

MATLAB menyediakan fungsi operasi standar dari polinom, seperti akar polinomial, evaluasi, dan turunan. Sebagai tambahan, fungsi-fungsi berikut diberikan untuk aplikasi lebih lanjut, seperti pencocokan kurva dan ekspansi fraksi parsial.

Fungsi	Keterangan
`conv`	Perkalian polinomial
`deconv`	Pembagian polinomial
`poly`	Polinomial dengan akar-akar tertentu

Fungsi	Keterangan
`polyder`	Turunan polinomial
`polyfit`	Pencocokan kurva polinomial
`polyval`	Evaluasi polinomial
`polyvalm`	Evaluasi matriks polinomial
`residue`	Ekspansi fraksi parsial
`roots`	Mencari akar-akar polinomial

1.11.2. Transformasi Laplace

Pada bagian ini akan diberikan dasar-dasar pengetahuan tentang bagaimana menggunakan *software* untuk menyelesaikan persoalan transformasi Laplace dengan MATLAB

Contoh:

Tentukan transformasi Laplace dari fungsi berikut ini:

f = 0,03(1-cos2t)

Jawab: <u>command windows:</u>

```
>> f = sym('1-cos2*t)')
>> F = laplace(f)
```

<u>atau pada M-file:</u>

```
>>Syms t       % Untuk inisialisasi variabel
>>f = 1-cos2*t
>>laplace(g)
```

1.11.3. Invers Transformasi Laplace

Contoh:

Tentukan invers transformasi Laplace dari fungsi berikut:

Jawab:

Command Windows:

```
>> F = exp(-1)/(s-1)
>> f = ilaplace(f)
```

Atau pada M-File:

`Syms s %` Untuk inisialisasi variabel

```
>>F = exp(-1)/(s-1)
>>ilaplace(F)
```

1.11.4. Differensial

Contoh:

1. Turunan pertama dari fungsi y

```
>> syms x; ↵
>> y=x^3+2*x^2+6*x+7; ↵
>> z=diff(y) ↵
```

Akan muncul sebagai berikut:

```
z =
3*x^2+4*x+6
```

2. Turunan kedua dari fungsi y

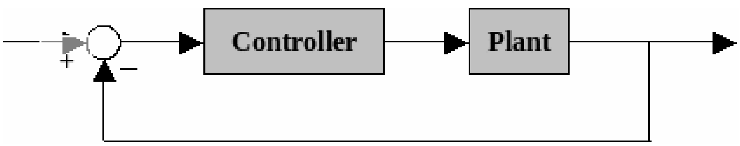
```
>>z=diff(y,2)
```

Akan muncul sebagai berikut:

```
z =6*x+4
```

1.12. Kontrol PID

PID (dari singkatan bahasa *Proportional–Integral–Derivative controller*) merupakan kontroler untuk menentukan presisi suatu sistem instrumentasi dengan karakteristik adanya umpan balik pada sistem tersebut. Komponen kontrol PID ini terdiri dari tiga jenis yaitu Proporsional, Integratif dan Derivatif. Ketiganya dapat dipakai bersamaan maupun sendiri-sendiri tergantung dari respons yang kita inginkan terhadap suatu *plant*. Selain itu sistem ini mudah digabungkan dengan metode pengaturan yang lain seperti Fuzzy dan Robust. Sehingga akan menjadi suatu sistem pengatur yang semakin baik pada bab ini diuraikan yang dibatasi pada sistem dengan *Unity Feedback System*, yang gambarnya sebagai berikut:



Gambar 1.27 *Block Diagram* Sistem dengan *Loop* Per Penguatan 1 (Satu)

1.12.1. Tiga Jenis *Controller* dan Karakteristiknya:

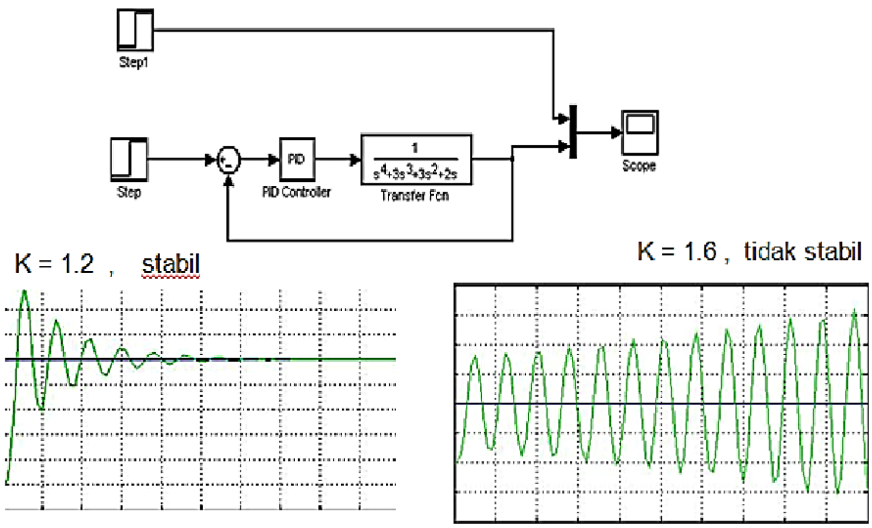
1.12.1.1. Kontroler Proporsional (P)

Bila pada sistem diterapkan sebuah kontroler proporsional (K_P) maka Pengaruh pada sistem adalah sebagai berikut:

1. Menambah atau mengurangi kestabilan.
2. Dapat memperbaiki respons *transien* khususnya: *rise time*, *settling time*

3. Mengurangi (bukan menghilangkan) waktu naik dan *error steady state* (E_{ss},)

Nb: untuk menghilangkan Ess, dibutuhkan KP besar, yang akan membuat sistem lebih tidak stabil. Kontroler Proporsional memberi pengaruh langsung (sebanding) pada *error*. Semakin besar *error*, semakin besar sinyal kendali yang dihasilkan kontroler. Untuk lebih jelasnya maka lihat gambar berikut atau dengan pernyataan lain, untuk menghilangkan E_{ss}, dibutuhkan K_P besar, yang akan membuat sistem lebih tidak stabil.



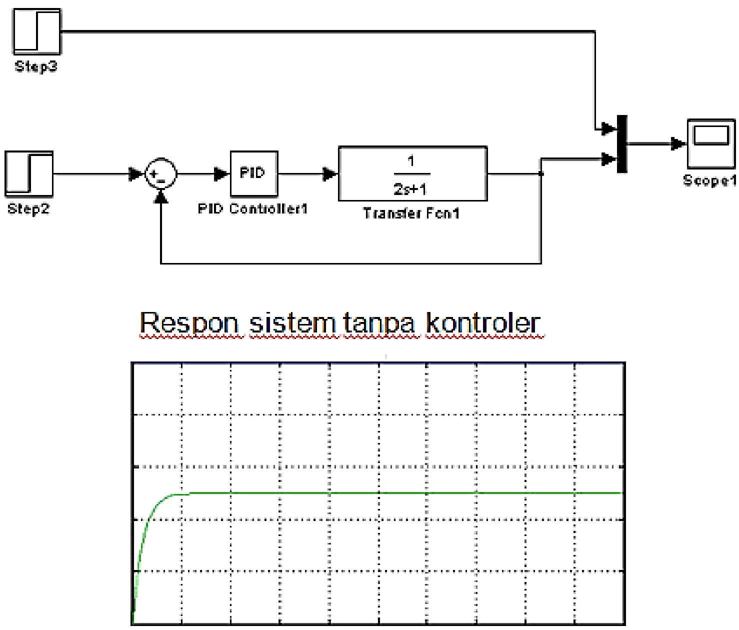
Gambar 1.28 Simulasi Kontroler Menggunakan Proporsional Kontroler

1.12.1.2. Kontroler Integral (I)

Pengaruh pada sistem:

1. Menghilangkan *Error Steady State*
2. Respons lebih lambat (dibandingkan dengan P)
3. Dapat Menambah Ketidakstabilan (karena menambah orde pada sistem)

Perubahan sinyal kontrol sebanding dengan perubahan *error*. Semakin besar *error*, semakin cepat sinyal kontrol bertambah/berubah. Lebih jelasnya maka lihat gambar berikut.



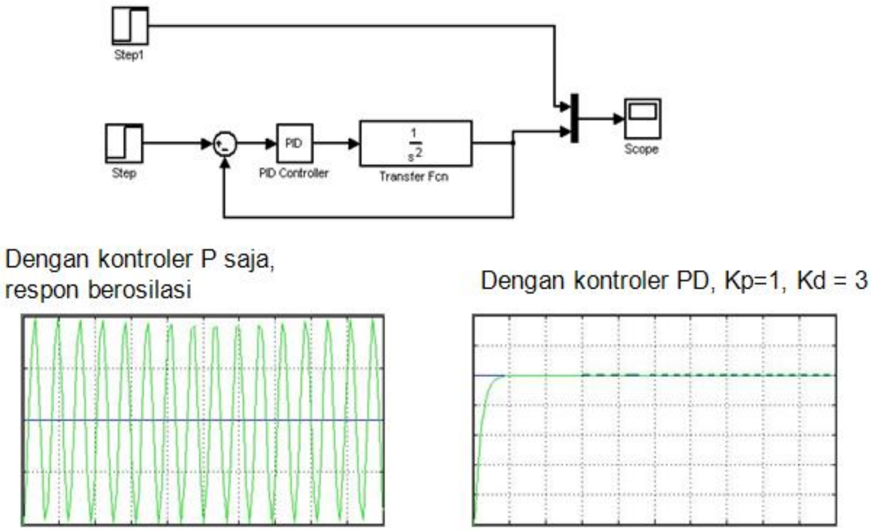
Gambar 1.29 Simulasi Kontroler Menggunakan Integrator Kontroler

1.12.1.3. Kontroler Derivatif (D)

Pengaruh pada sistem:

1. Memberikan efek redaman pada sistem yang berosilasi sehingga bisa memperbesar pemberian nilai Kp
2. Memperbaiki respons *transien*, karena memberikan aksi saat ada perubahan *error*
3. D hanya berubah saat ada perubahan *error*, sehingga saat ada *error* statis D tidak beraksi. Sehingga D tidak boleh digunakan sendiri

Besarnya sinyal kontrol sebanding dengan perubahan *error* (E) Semakin cepat *error* berubah, semakin besar aksi kontrol yang ditimbulkan. Lebih jelasnya maka lihat gambar berikut.



Gambar 1.30 Simulasi Kontroler Menggunakan Integrator

Besarnya sinyal kontrol sebanding dengan perubahan *error* (e). Semakin cepat *error* berubah, semakin besar aksi kontrol yang ditimbulkan. Lebih jelasnya maka lihat gambar berikut.
Fungsi transfer dari *PID Controller* akan tampak sebagai berikut:

K_P + + K_Ds =

- K_P = Proportional Gain
- K_I = Integral Gain
- K_D = Derivatif Gain

Tabel 1.7 Respons *PID Controller* terhadap Perubahan Konstanta

Respons *Loop* Tertutup	**Waktu Naik**	**Overshoot**	**Waktu Turun**	**Kesalahan Keadaan Tunak**
Kp	Menurun	Meningkat	Perubahan Kecil	Menurun
Ki	Menurun	Meningkat	Meningkat	Hilang
Kd	Perubahan Kecil	Menurun	Menurun	Perubahan Kecil

1.13. Simulasi Sistem

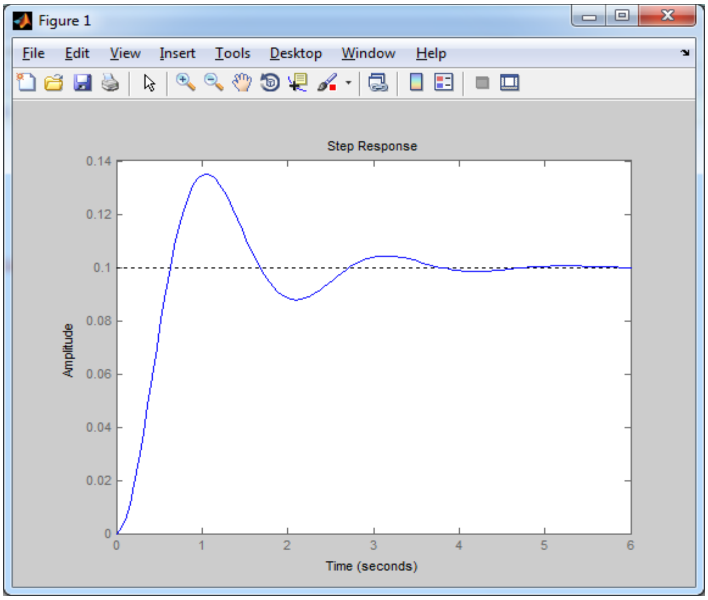
1.13.1. Simulasi dengan M-File

Untuk menganalisis suatu sistem, *software* hanya memerlukan masukan berupa *transfer function* yang ditulis dalam Laplace Transform (dalam *s*-domain) atau matriks. Contoh, suatu sistem kontrol memiliki *transfer function* sebagai berikut:

Ketikkan *listing* berikut pada M-File:

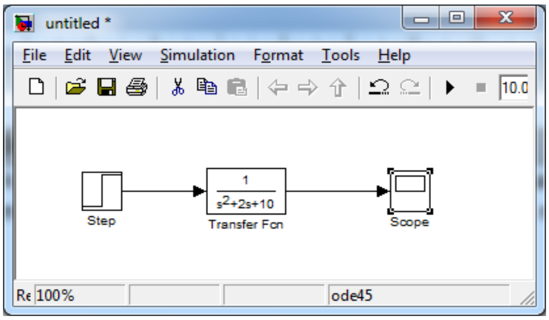
```
num = [1];
den = [1 2 10];
step(num,den)
title('Open Loop Response')
```

Respons sistem terbuka (*open loop response*) dapat dilihat pada gambar di bawah ini:

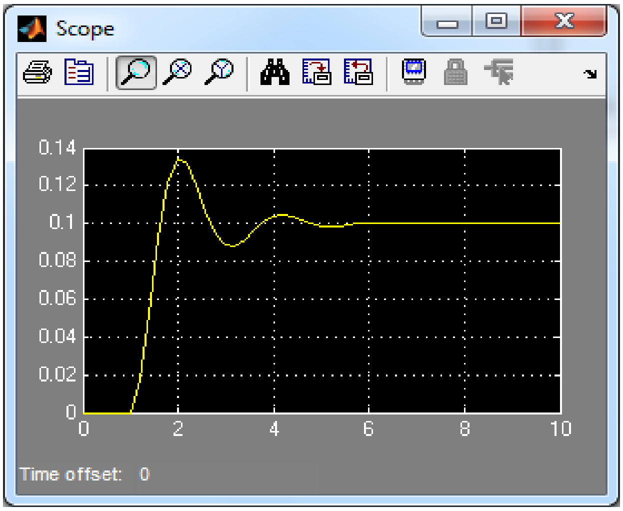


1.14. Simulasi dengan Simulink

Pada M-File kurva respons sistem dibuat dengan menggunakan *listing* program, sedangkan pada Simulink kita bisa menganalisis sistem dengan menggunakan *block diagram*.



Analisis dengan menggunakan Simulink:



1.15. Tugas dan Jawaban

1. Buatlah matriks A dan B ordo 4x4, dan tentukan:

```
>> A=[ 6 5 8 7 ; 4 6 7 4 ; 3 4 2 8 ; 8 4 6 2 ]
A =
6 5 8 7
4 6 7 4
3 4 2 8
8 4 6 2
>> B=[ 5 4 6 7 ; 5 7 8 9 ; 8 6 4 2 ; 8 7 4 6 ]
B =
5 4 6 7
5 7 8 9
8 6 4 2
8  7 4 6
```

2. Invers matriks A dan B

```
>> inv(A)
ans =
-0.0525 -0.1377 0.0623 0.2098
-0.3902 0.3508 0.1508 0.0607
0.2820 -0.0098 -0.2098 -0.1279
0.1443 -0.1213 0.0787 -0.0770
>> inv(B)
ans =
0.2809 -0.2697 0.0618 0.0562
-0.4944 0.3146 0.0112 0.1011
0.1180 0.1067 0.2360 -0.3764
0.1236    -0.0787 -0.2528 0.2247
```

3. A x (B – 1)

```
>> A*(B-1)
ans =
149 130 110 119
117 107 95 99
98 91 73 92
104       92 96
```

4. Invers A x B

```
>> inv(A)*B
ans =
1.2262 0.6689 -0.3279 -0.2230
1.4951 2.2246 1.3115 1.0918
-1.3410 -1.0951 0.2623 0.6984
```

```
0.1279    -0.3393 -0.0984 -0.3869
```

5. A^2

```
>> A^2
ans =
136 120 141 140
101 100 112 116
104 79 104 69
98 6 116 124
```

6. Elemen matriks A dan B dengan 4

```
>> A =[ 4 4 4 4 ; 4 4 4 4 ; 4 4 4 4 ; 4 4 4 4 ]
A =
4 4 4 4
4 4 4 4
4 4 4 4
4 4 4 4
>> B=[ 4 4 4 4 ; 4 4 4 4 ; 4 4 4 4 ; 4 4 4 4 ]
B =
4 4 4 4
4 4 4 4
4 4 4 4
4  4 4 4
```

7. Pangkatkan dengan 2 setiap matriks A dan B

```
>> A.^2
ans =
16 16 16 16
```

```
16 16 16 16
16 16 16 16
16 16 16 16
>> B.^2
ans =
16 16 16 16
16 16 16 16
16 16 16 16
16 6 16 16
```

8. Determinan matriks A dan B

```
>> det A
ans =
65
>> det B
ans =
66
```

9. Ubah persamaan linear berikut menjadi persamaan matriks dan cari nilai x1, x2, x3, dan x4!

2x1 + x2 + 4x3 + 5x4 = 8
x1 – 2x2 - 1x3 + 5x4 = 4
9x1 + 3x2 + 3x3 + 4x4 = 10
4x1 + 3x2 + 7x3 – 1x4 = 47

Jawab:

```
>> A = [2 1 4 5 ; 1 -2 -1 5 ; 9 3 3 4 ; 4 3 7 -1]
A =
2 1 4 5
1 -2 -1 5
```

```
9 3 3 4
4 3 7 -1
>> B = [8;4;10;47]
B =
8
4
10
47
>> C = inv(A)*B
C =
5.9000
-17.3000
10.0000
-5.3000
>> x1=5.9000;x2=-17.3000;x3=10.0000;x4=-5.3000;
>> B=[x1;x2;x3;x4]
B =
5.9000
-17.3000
10.0000
-5.3000
```

10. Buat tampilan grafik plot, *stem*, *bar*, dan *stair* dari 2 persamaan dalam 1 grafik!:

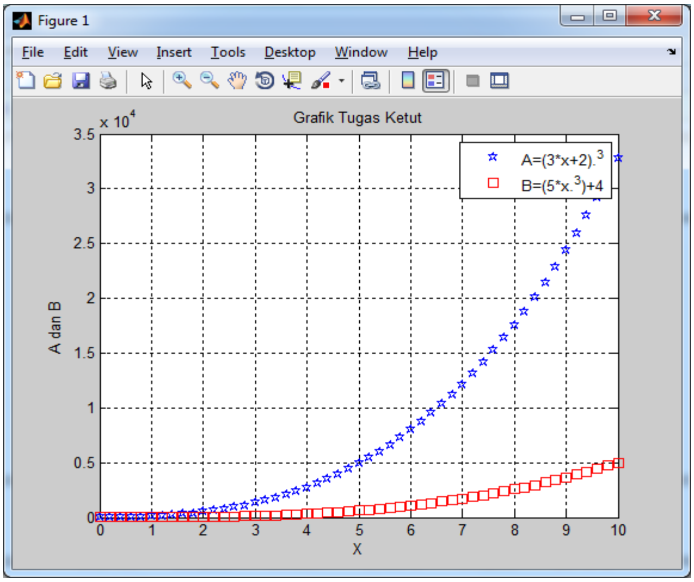
A = $(3x+2)^3$ Di mana: n = 5;
B = $5x^3+4$ x = 0: 1/n: 10

Jawab:
- Bahasa programnya dari A = $(3x+2)^3$ Di mana: n = 5;

```
n=5
x=0: 1/n:10
```

```
A=(3*x+2).^3
B=(5*x.^3)+4
plot(x,A,'bp')
hold on
plot(x,B,'rs')
hold on
title('Grafik Tugas Ketut')
xlabel('X'),ylabel('A dan B')
grid
legend('A=(3*x+2).^3','B=(5*x.^3)+4')
hold off
```

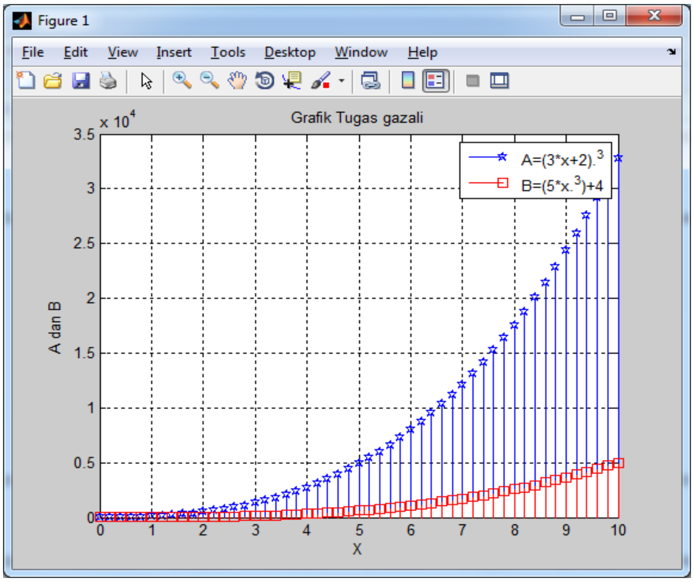
Hasil plot persamaan A = $(3x+2)^3$ di mana: n = 5;



Bahasa programnya dari B = $5x^3+4$ x = 0: 1/n: 10

```
n=5
x=0: 1/n:10
A=(3*x+2).^3
B=(5*x.^3)+4
stem(x,A,'bp')
hold on
stem(x,B,'rs')
hold on
title('Grafik Tugas gazali')
xlabel('X'),ylabel('A dan B')
grid
legend('A=(3*x+2).^3','B=(5*x.^3)+4')
hold off
```

Hasil plot persamaan B = $5x^3$+4 x = 0: 1/n: 10



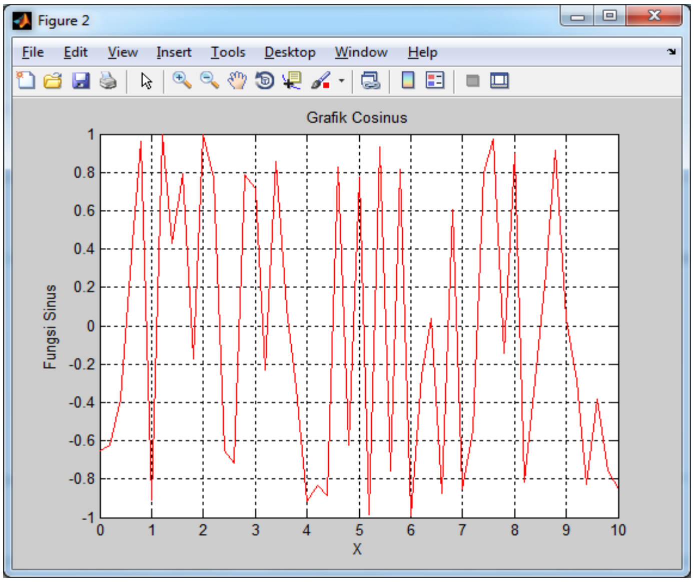
11. Bagaimana cara menampilkan dua fungsi sinus dan cosinus pada masing fungsi yang disajikan dalam grafik yang berbeda. Misalnya A = $(3x+2)^3$ Di mana: n = 5; B = $5x^3+4$ x = 0: 1/n: 10 fungsi pertama Anda tampilkan pada figure (1), sementara fungsi kedua Anda tampilkan pada figure (2)!

Jawab:

Bahasa programnya

```
n=5
x=0: 1/n:10
A=(3*x+2).^3
B=(5*x.^3)+4
C=sin(A)
D=cos(B)
figure(1)
plot(x,C,'b-')
hold on
title('Grafik Sinus')
xlabel('X'),ylabel('Fungsi Sinus')
grid
figure(2)
plot(x,D,'r-')
hold on
title('Grafik Cosinus')
xlabel('X'),ylabel('Fungsi Sinus')
grid
hold off
```

Hasil plot



Hasil Plot Persamaan B=(5*x.^3)+4, D=cos(B), di mana: n = 5 x maks =10;;

12. Tentukan transformasi fungsi Laplace berikut!

1.
```
>>syms t
>>F= (t^3 + 3*t^2 + 4*t + 3)
>>laplace(F)
>>F =
t^3+3*t^2+4*t+3
>>ans =
6/s^4+6/s^3+4/s^2+3/s
```

2.
```
>>syms t
>>F= 3*(2*t-3)+(t-3)
>>laplace(F)
>>F =
7*t-12
>>ans =
```

```
   7/s^2-12/s
3. >>syms t
   >>F= (3*sin(5*t*(pi/180)))
   >>laplace(F)
   >>F =
   3*sin(1/36*t*pi)
   >>ans =
   1/12*pi/(s^2+1/1296*pi^2)
4. >>syms t
   >>F=(5*cos(3*t*(pi/180)))
   >>laplace(F)
   F =
   5*cos(1/60*t*pi)
   >>ans =
   5*s/(s^2+1/3600*pi^2)
```

13. Tentukan transformasi Laplace balik dari fungsi-fungsi berikut:

1. >>F(s) = ((s^2 +3s +2)/(s^3 +5s^2 +10.5s +9))

```
   Jawab:
   >>syms s
   F=((s^2 +3*s +2)/(s^3 +5*s^2 +10.5*s +9))
   >>ilaplace(F)
   >>F =
   (s^2+3*s+2)/(s^3+5*s^2+21/2*s+9)
   >>ans =
   exp(-3/2*t)*cos(3/2*t)-1/3*exp(-3/2*t)*sin(3/2*t)
```

2. F(s) = ((s+1)/(s^3+6s^2+11s+6))

```
   Jawab:
   >>syms s
   >>F=((s+1)/(s^3+6*s^2+11*s+6))
   >>ilaplace(F)
   >>F =
   (s+1)/(s^3+6*s^2+11*s+6)
   >>ans =
   -exp(-3*t)+exp(-2*t)
```

3. F(s) = ((4s+5)/(s^2+5s+18.5))

```
Jawab:
>>syms s
>>F=((4*s+5)/(s^2+5*s+18.5))
>>ilaplace(F)
>>F =
(4*s+5)/(s^2+5*s+37/2)
>>ans =
4*exp(-5/2*t)*cos(7/2*t)-10/7*exp(-
5/2*t)*sin(7/2*t)
```

4. F(s) = ((s^2-16)/(s^3+8s^2+24s+32))

```
 Jawab:
>>syms s
>>F==((s^2-16)/(s^3+8*s^2+24*s+32))
>>ilaplace(F)

>>ans =
0
>>ans =
4*exp(-5/2*t)*cos(7/2*t)-10/7*exp(-
5/2*t)*sin(7/2*t)
```

14. Buatlah gambar M-file dan Simulink grafik keluaran sinyal dari TF persamaan berikut:

G(s) = s+2/2s^2+3s

G(s) = 2s+1/5s^2+2s+1

BAB 2

MATRIKS UNTUK SISTEM KENDALI

Setelah mempelajari bab ini maka akan dapat memahami hal-hal berikut:

- ✓ Mengerti tentang definisi matriks
- ✓ Mengerti jenis-jenis matriks
- ✓ Dapat menggunakan matriks dalam sistem kendali
- ✓ Mengerti invers matriks
- ✓ Mengerti kofaktor matriks
- ✓ Mengerti minor matriks
- ✓ Mengerti fungsi matriks
- ✓ Dapat mengaplikasikan matriks pada teknik kendali

Dalam menganalisa mendesain serta merancang sistem teknik kendali penggunaan matriks sangat penting, untuk memahami pentingnya matriks, maka akan dijelaskan beberapa matriks penting yang sering dipergunakan dalam sistem kendali, jenis –jenis matriks tersebut adalah sebagai berikut.

2.1. Matriks

Adalah suatu larikan bilangan-bilangan berbentuk persegi panjang yang terdiri dari baris dan kolom

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari contoh di atas terlihat bahwa matriks tersebut berordo 3x3atau matriks tersebut memiliki 3 kolom dan 3 baris. Sebagai contoh bila diketahui sebuah matriks dengan dimensi 3x3 sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini

```
      >> A=[1 2 3; 2 3 4; 3 2 1]
        A =
12   3
2 3   4
3   2   1
```

2.2. Elemen Matriks

Adalah nilai yang terdapat dalam matriks tersebut.

Contoh:

$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ berarti elemen matriksnya adalah a_{11}, a_{21}, a_{31}

Bila diketahui elemen matriks dengan dimensi 1x3 maka bentuk matriks ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini

```
>> A=[1; 2; 3]
A =
1
2
3
```

2.3. Ordo Matriks

Ordo matriks adalah menyatakan banyaknya m baris dan n kolom yang membentuk matriks tersebut.

Contoh:

Bila suatu matriks A memiliki ordo 3 x 2 maka matriks tersebut terdiri dari 3 baris dan 2 kolom elemen matriks.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Dari contoh di atas terlihat bahwa matriks tersebut berordo 3x3atau matriks tersebut memiliki 2 kolom dan 3 baris. Sebagai contoh bila diketahui sebuah matriks dengan dimensi 2x3 sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini

```
>> A=[2 4; 3 4; 2 1]
        A =
            2   4
            3   4
            2   1
```

2.4. Jenis-Jenis Matriks

1. Matriks square (*bujur sangkar*)

Adalah matriks dengan jumlah baris = jumlah kolom, sehingga disebut matriks bujur sangkar.

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks *square* (*bujur sangkar*) ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini

```
>> A=[1 2 3 4; 3 4 5 6;2 3 4 5;1 2 3 4]
A =
    1   2   3   4
    3   4   5   6
    2   3   4   5
    1   2   3   4
```

2. Matriks kolom

Adalah matriks yang hanya memiliki 1 kolom atau dapat dikatakan matriks yang memiliki dimensi *m*, di mana jumlah kolom *n* hanya dan harus sama dengan 1.

Contoh:

$$A = \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}$$

Bentuk matriks *kolom* ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini

```
>> A=[1; 3; 2; 1]
A =
    1
    3
    2
    1
```

3. Matriks baris

Adalah matriks yang hanya memiliki 1 baris atau dapat dikatakan matriks yang memiliki dimensi n, di mana jumlah baris m hanya dan harus sama dengan 1.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks *baris* ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini

```
>> A=[1 3 2 1]
A =
    1    3    2    1
```

4. *Matriks diagonal*

Adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utamanya 0.

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks *diagonal* ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini

```
>> A=[1 0 0 0; 0 2 0 0; 0 0 2 0; 0 0 0 2]
A =
    1    0    0    0
    0    2    0    0
    0    0    2    0
    0    0    0    2
```

5. *Matriks identitas*

Adalah matriks diagonal yang elemen – elemen diagonal utama adalah 1

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks *identitas* ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini:

```
>> A=[1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]
A =
    1    0    0    0
    0    1    0    0
    0    0    1    0
    0    0    0    1
```

6. Matriks nol

Adalah matriks yang semua elemennya bernilai 0

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk **matriks *nol***i ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini

```
>> A=[0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0]
A =
    0    0    0    0
    0    0    0    0
    0    0    0    0
    0    0    0    0
```

Atau dapat juga ditulis berikut:

```
>> zeros(4)
ans =
    0    0    0    0
    0    0    0    0
    0    0    0    0
    0    0    0    0
```

7. Matriks simetris

Adalah matriks yang *transpose*-nya sama dengan dirinya sendiri

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks *simetris* ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini:

```
>> A=[1 3 4;3 5 3;4 3 1]
A =
    1    3    4
    3    5    3
    4    3    1
>> B=transpose(A)
B =
    1    3    4
    3    5    3
4    3    1
```

***8. M**atriks pita*

Adalah matriks yang mempunyai elemen sama dengan nol, kecuali pada satu jalur yang berpusat pada diagonal utama.

$$A=\begin{bmatrix} a11 & a12 & 0 & 0 \\ a21 & a22 & a23 & 0 \\ 0 & a32 & a33 & a34 \\ 0 & 0 & a43 & a44 \end{bmatrix}$$

Bentuk **matriks pita** ini dapat ditulis dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB seperti di bawah ini:

```
>> A=[1 0 0;0 5 0;0 0 1]
A =
    1    0    0
    0    5    0
    0    0    1
```

2.5. Determinan Matriks

Ada beberapa cara untuk menentukan determinan suatu matriks.

1. Untuk matriks berordo 2 x 2 digunakan cara perkalian silang sebagai berikut:

$A=\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$ determinannya adalah: $a_{11}xa_{22}-a_{12}xa_{21}$

Contoh:

Tentukan determinan dari matriks di bawah ini:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

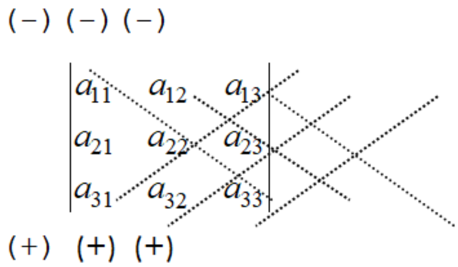
Penyelesaian:

Determinannya adalah: $a_{11}xa_{22} - a_{12}xa_{21}$ = 4.5 – 2.3 = 14

Bentuk **determinan** ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
A =

    4   3

    2   5

>> B=det(A)

B =

  14
```

2. Untuk matriks berordo lebih tinggi digunakan metode ***SARRUS*** sebagai berikut:



Contoh:

Tentukan determinan dari matriks di bawah ini:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 8 \\ 6 & 1 \\ 1 & 7 \end{matrix} \quad 3(3-14)-8\,(18-2)\,+5(42-1)=44$$

Jadi determinan matriks di atas adalah 44

Bentuk **determinan** ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
A =
          3      8      5
          6      1      2
          1      7      3
>> B=det(A)
B =
      44
```

SIFAT – SIFAT DETERMINAN

a. $\det(A) = \det(A^T)$
b. Tanda determinan berubah jika 2 baris atau kolom ditukar tempatnya.
c. Harga determinan menjadi λ kali, bila suatu baris/kolom dikalikan dengan skalar λ

3. Menghitung Determinan matriks dengan cara Reduksi Baris

Metode ini penting untuk menghindari perhitungan panjang yang terlibat dalam penerapan definisi determinan secara langsung.

Teorema*:*

Jika A adalah matriks segitiga n x n, maka det(A) adalah hasil kali elemen – elemen pada diagonal utama, yaitu, det(A) = $a11, a22, a33, \ldots.., ann$

Contoh : $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ = (2) (-3) (6) (9) (4) = -1296

Contoh:

Hitung det(A) di mana A = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

Jawab:

Baris I ditukar dengan baris II (H_{21}), sehingga menjadi = - $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

= - 3 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow H_{31}^{(-2)} \Rightarrow$ = - 3 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \Rightarrow H_{32}^{(-10)} \Rightarrow$

= - 3 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$ = (-3) (-55) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = (-3) (-55) (1) = 165

Bentuk **determinan** ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
>> A=[0 1 5;3 -6 9; 2 6 1]
A =
       0      1      5
       3     -6      9
       2      6      1

>> B=det(A)
B =
   165
```

Metode reduksi baris ini sangat sesuai untuk menghitung determinan dengan menggunakan komputer karena metode tersebut sistematis dan mudah diprogramkan.

1. **Minor, Ekspansi Kofaktor, & Aturan Cramer**

Minor a_{ij} adalah determinan submatriks yang tetap setelah baris ke – *i* dan kolom ke – *j* disilang dari A. Dinyatakan dengan $|M_{ij}|$. Sedangkan bilangan $(-1)^{i+j}$ |Mij| dinyatakan oleh C_{ij} disebut *Kofaktor*

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \text{ Minor dari elemen } a_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6$$

Kofaktor dari elemen $a_{23} = (-1)^5 (-6) = 6$

Perhatikan bahwa kofaktor dan minor hanya berbeda pada tandanya, yaitu $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Cara cepat untuk menentukan apakah penggunaan tanda + atau tanda – adalah dengan cara menghubungkan C_{ij} dan M_{ij} berada dalam baris ke – *i* dan kolom ke – *j* dari susunan seperti di bawah ini:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & .. \\ - & + & - & + & - & .. \\ + & - & + & - & + & .. \\ - & + & - & + & - & .. \\ + & - & + & - & + & .. \\ . & & & & & \\ & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & & & & & \end{bmatrix}$$

Misalnya $C_{11} = M_{11}$, $C_{21} = -M_{21}$, $C_{44} = M_{44}$, $C_{23} = -M_{23}$

Teoremanya

Determinan matriks A yang berukuran *n* x *n* dapat dihitung dengan mengalikan elemen – elemen dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor–kofaktornya dan menambahkan hasil kali yang dihasilkan, yaitu setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke – j)

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke – i)

Contoh:

Det(A) bila A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ adalah

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama

$= 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (3)(-4) - (1)(-11)$

= -12 + 11

= -1

Bentuk **determinan** ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
>> A=[3 1 0;-2 -4 3; 5 4 -2]
A =
      3     1     0
     -2    -4     3
      5     4    -2

>> B=det(A)
B =
   -1.0000
```

<u>Definisi</u>*:*

Jika A adalah sebarang matriks *n* x *n* dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & . \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$ disebut matriks kofaktor A.

Transpose matriks ini disebut ***Adjoin A*** dan dinyatakan dengan ***adj(A).***

Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{ adj(A)}$$

2. ATURAN CRAMER

Teoremanya

Jika AX = B adalah bagian yang terdiri dari n persamaan linier dalam n bilangan tak diketahui, sehingga det(A) $\neq$ 0, maka bagian tersebut mempunyai pemecahan yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

di mana A_j adalah matriks yang didapatkan dengan menggantikan elemen- elemen dalam kolom ke j dari A dengan elemen matriks B = $\begin{bmatrix} b \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$

Contoh:

Gunakan aturan Cramer untuk memecahkan

$x_1 + 0 + 2x_3 = 6$

$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$

$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 40 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11},$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

2.6. Kofaktor Determinan Matriks

Jika matriks A dengan m baris dan n kolom kita hilangkan baris ke-i dan kolom ke-j, maka determinan dari matriks kuadrat dengan (m-1) baris dan (n-1) kolom, yaitu sisa matriks yang tinggal (disebut minor matriks dari elemen a_{ij}) diberi simbol $\left|A_{ij}\right|$. Apabila pada setiap minor kita tambahkan tanda + atau – sebagai tanda pada determinan dan kemudian kita beri simbol: $(-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$ maka kita peroleh apa yang disebut *kofaktor* elemen a_{ij} dan biasanya diberi simbol K_{ij}. Jadi jelasnya Kofaktor $K_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$, ini berarti bahwa setiap elemen mempunyai kofaktor sendiri-sendiri.

Contoh:

Dengan menggunakan kofaktor, cari determinan matriks A berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mempergunakan baris ke-1 (i = 1)

$|A|$ = a_{11} k_{11} + a_{12} k_{12} + a_{13} k_{13}

K_{11} = $(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ = (0-10) = -10

K_{12} = $(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ = - (0-2) = 2

K_{13} = $(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ = (-15-1) = -16

$|A|$ = 2.(-10) - 4.(2) + 3.(-16)

= -20 – 8 - 48

= 76

Bentuk **determinan** ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
>> A=[2 -4 3;-3 1 2;1 5 0]
A =
     2    -4     3
    -3     1     2
     1     5     0
>> B=det(A)
B =
   -76
```

2.7. Matriks Singular

Matriks singular adalah jenis matriks yang tidak memiliki invers perkalian. Misalkan **A** adalah adjoin matriks **A**, dan |A| adalah nilai determinannya. Jelaslah **A** tidak terdefinisikan jika |A| = 0, yang kemudian dikatakan bahwa **A** yang bernilai determinan nol tidak mempunyai invers, atau bersifat singular.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \text{determinan Matriks A=} |A| = 4.6 - (8.(-5)) = 64$$

Karena determinan A=0, maka Matriks A tidak mempunyai invers sehingga Matriks A dikatakan Matriks Singular.

1. *Transpose* matriks

Transpose dari suatu matriks A (ditulis A^T) adalah matriks yang elemen barisnya diubah menjadi elemen kolom, dan elemen kolomnya diubah menjadi elemen baris.

Contoh:

$$A = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{vmatrix}_{2x3} \quad \text{maka } A^T = \begin{vmatrix} a11 & a21 \\ a12 & a22 \\ a13 & a23 \end{vmatrix}_{3x2}$$

<u>Sifat–sifat matriks transpose</u>

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $\lambda(A^T) = (\lambda A)^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

2. Matriks Adjoin

Jika A adalah sebarang matriks *n* x *n* dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$ disebut matriks kofaktor A.

Transpose matriks ini disebut ***Adjoin A*** dan dinyatakan dengan ***adj(A).*** Dengan kata lain Adjoin suatu matriks adalah *Transpose* dari kofaktor matriks tersebut.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$ Matriks kofaktornya $$k = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -8 \\ 4 & -2 & 8 \\ 4 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$

sehingga Adjoin dari Matriks A adalah: $$Adjoin(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 6 & -2 & -10 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

yang merupakan *Transpose* dari kofaktornya.

3. Matriks invers

Jika ada suatu matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka kita dapat mencari matriks inversnya dengan cara $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Selain itu kita juga dapat mencari invers matriks dengan metode eliminasi Gauss:

Contoh

Cari invers matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Jawab:

Pada akhir operasi, matriks dibentuk menjadi [*I* |A^{-1}] dari bentuk asal [*A* | *I*]

$$\left[\begin{array}{c:ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

dengan operasi elementer $H_{21}^{(-2)}$ dan $H_{21}^{(-1)}$ menjadi

$$\left[\begin{array}{cc:cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

dengan operasi elementer $H_{32}^{(2)}$ menjadi

$$\left[\begin{array}{cc:cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

dengan operasi elementer $H_{3}^{(-1)}$ menjadi

$$\left[\begin{array}{c:ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

dengan operasi elementer $H_{13}^{(-3)}$ dan $H_{23}^{(3)}$ menjadi

$$\left[\begin{array}{c:ccccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

dengan operasi elementer $H_{12}^{(-2)}$ menjadi

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Jadi invers dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Invers dari matriks ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
>> A=[1 2 3;2 5 3; 1 0 8]
A =
     1     2     3
     2     5     3
     1     0     8
>> B=inv(A)
B =
  -40.0000   16.0000    9.0000
   13.0000   -5.0000   -3.0000
    5.0000   -2.0000   -1.0000
```

4. **Operasi Matriks**

a. **Penjumlahan Matriks**

Apabila A dan B adalah dua matriks m x n, penjumlahan, A+B didefinisikan sebagai matriks m x n, di mana tiap elemen matriks C adalah jumlah dari elemen-elemen yang berkaitan dari A dan B.

C = A + B

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **dan** $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 9+3 & 5+8 & 3+5 \\ 7+6 & 2+4 & 1+7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 8 \\ 13 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Dari sini dapat diturunkan sebuah rumus umum penjumlahan dua buah matriks Cij = Aij + Bij di mana i=1, 2,..,n dan j=1,2,..,m. Sementara n adalah jumlah baris, dan m adalah jumlah kolom

Penjumlahan dari dua bua matriks ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
>> A=[9 5 3;7 2 1]
A =
     9     5     3
     7     2     1
>> B=[3 8 5;6 4 7]
B =
     3     8     5
     6     4     7
>> C=A+B
C =
    12    13     8
    13     6     8
```

5. Perkalian Dua Matriks

Operasi perkalian dua buah matriks hanya bisa dilakukan pada tiap elemen dari baris dikalikan dengan elemen dari kolom dan kemudian dijumlahkan.

Dengan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, lalu hasilnya (misalnya) dinamakan matriks

C

C = A.B

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 3.1 + 8.5 + 5.2 & 3.3 + 8.9 + 5.4 \\ 6.1 + 4.5 + 7.2 & 6.3 + 4.9 + 7.4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 53 & 101 \\ 40 & 82 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh ini, maka secara umum bila ada matriks **A**nxm yang dikalikan dengan matriks **B**m×p, akan didapatkan matriks **C**n×p di mana elemen-elemen matriks **E** memenuhi

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$$ di mana i=1,2, dan j=1,2.

Perkalian dari dua bua matriks ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
>> A=[3 8 5;6 4 7]
A =
     3     8     5
     6     4     7
```

```
>> B=[1 3;5 9;2 4]
B =
     1     3
     5     9
     2     4
>> C=A*B
C =
    53   101
    40    82
```

6. Pembagian Matriks

Proses matematis pembagian pada matriks sedikit berbeda dengan operasi pembagian pada umumnya, karena matriks tersusun dari elemen-elemen matriks yang tidak dapat dipisahkan. Namun pembagian matriks dapat dikerjakan dengan pendekatan matriks invers sebagai berikut:
Bila didapatkan persamaan matriks sebagai berikut:

A.B = C

Maka:

$$B = \frac{C}{A} \text{ atau } B = A^{-1}.C$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa pembagian matriks C dengan matriks A sama dengan invers matriks A dikalikan dengan matriks C.
Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai matriks B jika A.B = C

Penyelesaian**:**

$$B = \frac{C}{A} = A^{-1}.C$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3.5 - 4.2}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 & -2/7 \\ -4/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$B = \begin{bmatrix} 5/7 & -2/7 \\ -4/7 & 3/7 \end{bmatrix} \text{X} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 15/7 & -4/7 \\ -8/7 & 0 \end{bmatrix}$$

Pembagian dari dua bua matriks ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
>> A=[3 2;4 5]
A =
     3     2
     4     5

>> B=[3 2;2 0]
B =
     3     2
     2     0
>> C=A/B
C =
    1.0000         0
    2.5000   -1.7500
```

7. *Rank* Matriks

Rank matriks adalah beberapa kolom matriks yang independen. *Rank* matriks bisa ditentukan dengan menggunakan persamaan eliminasi Gauss. *Rank* matriks memiliki syarat-syarat sebagai berikut:

1. Jika det matriks ≠ 0, maka *rank* r = orde matriks (n).
2. Jika det matriks = 0, maka harus dilihat minor dari matriks tsb.
3. Jika matriks bujur sangkar di dalam determinan ≠ 0, maka *rank* =2.
4. Matriks bujur sangkar orde n dengan *rank* = n (det A≠0) disebut matriks non-singular.
5. Matriks *zero* memiliki *rank* = 0.

Rank dari sebuah matriks ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya seperti di bawah ini:

```
>> A=[1 2 4 3 5;2 4 3 5 6;2 3 4 5 6;3 2 1 1 2;1 2 2 3 4]
A =
     1     2     4     3     5
     2     4     3     5     6
     2     3     4     5     6
     3     2     1     1     2
     1     2     2     3     4
>> B=rank(A)
B =
     5
```

Rank dari sebuah matriks *zero* ini dapat dihitung dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB hasilnya adalah nol seperti ditunjukkan di bawah ini:

```
>> A=zeros(5)

A =

     0     0     0     0     0

     0     0     0     0     0

     0     0     0     0     0

     0     0     0     0     0

     0     0     0     0     0


>> B=rank(A)

B =

     0
```

8. Nilai Eigen dan Vektor Eigen (*Eigen Value* dan *Eigen Vector*)

Nilai Eigen dan vektor Eigen adalah karakteristik dasar dari sebuah matriks persegi. Jika sebuah matriks persegi A, adalah sebuah set dari tiga kelompok larik bilangan (vektor x) yang bukan nol yang dapat disederhanakan dengan mengalikan dengan matriks A dengan faktor skala yang disebut dengan nilai Eigen λ, Bila nilai Eigen atau vektor Eigen bukan vektor trivial x dan skalar λ dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

Jika $A\underline{x} - \lambda I \underline{x}$ dengan I adalah matriks identitas maka dapat dituliskan dengan bentuk alternatif sebagai berikut:

$$A\underline{x} - \lambda I \underline{x} = \underline{0} \text{ atau } (A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$$

Untuk mendapatkan nilai Eigen adalah dengan mendapatkan nilai dari λ yaitu dengan menentukan nilai determinan dari persamaan $\left|A-\lambda I\right|=0$, dengan $|\quad|$ adalah determinan dari matriks-matriksnya.

Contoh

Dapatkan nilai Eigen dari matriks $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Untuk mendapatkan nilai Eigen dari matriks $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ maka kita dapat menggunakan persamaan $\left|A-\lambda I\right|=0$ maka dapat di tulis sebagai berikut:

$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ingat syarat perkalian dua matriks)

$$=\left|A-\lambda I\right|=0$$

$$=\left|\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right|=0$$

$$=\left|\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right|=0 \text{ atau } (3-\lambda)-(4-\lambda)-(-2)(-1)=0$$

dengan mengeluarkan tanda kurung dan melakukan perkalian maka didapat:

$$12-3\lambda-4\lambda+\lambda^2-2=0$$

dengan mengatur suku tertinggi diletakkan di sebelah kanan maka persamaan menjadi.

$$\lambda^2-7\lambda+10=0$$

dengan metode faktorisasi maka didapat nilai,

$$(\lambda-2)(\lambda-5)=0$$

Jadi nilai Eigen matriks A adalah 2 dan 5.

```
>> A=[ 3 -2; -1 4]
A =
     3     -1
     -1     4
>> B=eig(A)
B=
 2
 5
```

Untuk setiap nilai Eigen λ yang berhubungan dengan vektor Eigen dengan mencocokkan nilai λ dan x dengan persamaan berikut:

$$(A-\lambda I)\underline{x}=\underline{0}$$

Tidak ada penyelesaian yang unik pada persamaan ini, jika x adalah solusi dari setiap perkalian dari x.

Contoh

Dapatkan vektor Eigen dari matriks 2x2 berikut:

$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ telah didapatkan nilai Eigen adalah 2 dan 5.

Untuk nilai Eigen $\lambda = 2$ kita dapat menyelesaikan persamaan sebagai berikut:

$(A-\lambda I)\underline{x}=\underline{0}$

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right.$$ diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss

Jadi vektor Eigen adalah $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk nilai λ =2.

Sedangkan untuk nilai Eigen $\lambda = 5$ kita dapat menyelesaikan persamaan sebagai berikut:

$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi vektor Eigen adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ untuk nilai λ =5.

Contoh

Dapatkan nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Untuk mendapatkan nilai Eigen pertama–tama kita menyelesaikan persamaan dengan persamaan dengan persamaan $(A - \lambda I) = \underline{0}$:

Maka $\left|\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$\left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$, gunakan aturan Crammer untuk menyelesaikan

$$(1-\lambda)(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2=1)+(1-\lambda)=0$$

Dengan mengatur suku-sukunya menjadi sebagai berikut:

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-3)+(1-\lambda)=0$$

Selanjutnya

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0$$

Dengan metode akar kuadrat didapat akar-akar sebagai berikut:

$$(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)=0$$

Nilai Eigen matriks A adalah $\lambda = 1, -1, 2$

Bagaimana dengan vektor Eigen?

Untuk nilai Eigen $\lambda = 1$ *kita dapat menyelesaikan persamaan sebagai berikut:*

$(A-\lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss

Jadi vektor Eigen adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ untuk nilai λ =1.

Untuk nilai Eigen $\lambda = -1$ *kita dapat menyelesaikan persamaan sebagai berikut:*

$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss

Jadi vektor Eigen adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ untuk nilai $\lambda = -1$

Untuk nilai Eigen $\lambda = 2$ *kita dapat menyelesaikan persamaan sebagai berikut:*

$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss

Jadi vektor Eigen adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ untuk nilai $\lambda = 2$

Contoh lain dari Eigen

Carilah basis-basis untuk ruang Eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Pemecahan.

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} &= (\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda - 5) - 4(\lambda - 5) \\ &= (\lambda - 5)((\lambda - 3)(\lambda - 3) - 4) \\ &= (\lambda - 5)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari A adalah $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$, sehingga nilai-nilai Eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$. Jadi, kita peroleh dua ruang Eigen dari A.

Menurut definisi,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Adalah vektor Eigen dari A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika **x** adalah pemecahan taktrivial dari $(\lambda I - A) = 0$, yakni dari

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 5$,

maka $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

menjadi $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dengan memecahkan sistem ini

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

maka akan menghasilkan:

$$x_1 + x_2 = 0,$$

maka $x_1 = -x_2$, sedangkan $x_3 = x_3$.
Misalkan $x_2 = s$ dan $x_3 = t$, maka

$$x_1 = -s\ x_2 = sx_3 = t$$

Jadi, vektor-vektor Eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor bebas linear, maka vektor-vektor tersebut akan membentuk basis untuk ruang Eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$.

Jika $\lambda = 1$

maka $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

menjadi $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dengan memecahkan sistem ini maka akan menghasilkan

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh:

$x_1 - x_2 = 0$, maka $x_1 = x_2$, serta $x_3 = 0$.

Misalkan $x_1 = t$, diperoleh:

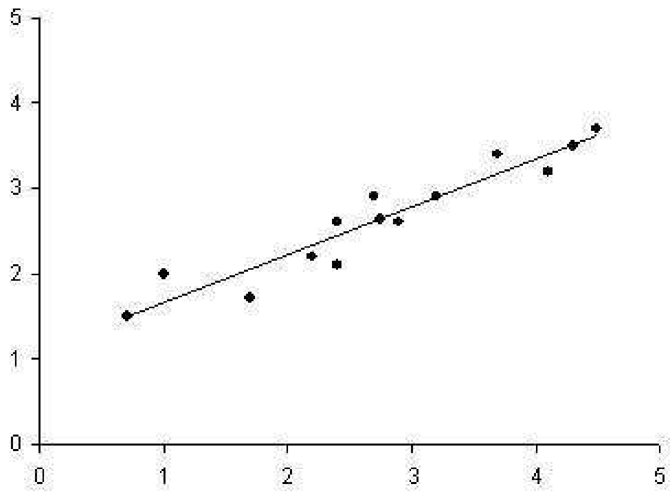
$x_1 = t\ x_2 = tx_3 = 0$

Jadi vektor-vektor Eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sehingga $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang Eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

9. Matriks *Single Value Decomposition* (SVD)

Matriks *Singular Value Decomposition* (SVD) dapat dilihat dari bentuk tiga mutual titik yang kompatibel, dari sisi lain kita dapat melihat metode transformasi hubungan antara variabel ke dalam set yang tidak bersesuaian satu dengan yang lain yang berkesesuaian dengan data orisinal pada saat yang bersamaan SVD diidentifikasi sesuai dengan dimensi dari data yang inhibit, perhatikan sebaran data seperti pada gambar 2-1.

.



Gambar 2.1 Sebaran dari Reduksi Data dalam Dua Dimensi

LATIHAN-LATIHAN

1. Jika A=$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan B=$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ tentukanlah!

   (a) A+B, (b) A-B, (c) A*B, (d) B*A

2. Hitunglah determinan!

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 11 & 9 & 13 \\ 15 & 17 & 19 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 155 & 226 & 81 \\ 2 & 535 & 984 \\ 3 & 642 & 1107 \end{bmatrix}$

3. Tentukan harga x dengan cara determinan jika terdapat persamaan berikut!

   (a) $\begin{cases} 2x + 3y - z - 13 = 0 \\ x - 2y + 2z + 3 = 0 \\ 3x + y + z - 10 = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 4x + 5y - 7z = -14 \\ 9x + 2y + 3z = 47 \\ x - y - 5z = 11 \end{cases}$

4. Carilah harga k agar persamaan-persamaan berikut sejalan!

   (a) $\begin{cases} 3x + 5y + k = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \\ (k+1)x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 4x - (k-2)y - 5 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \\ (k+1)x - 4y - 9 = 0 \end{cases}$

5. Suatu jaringan *resistive* menghasilkan persamaan sebagai berikut!

$$2(i3 - i2) + 5(i3 - i1) = 24$$
$$(i2 - i3) + 2i2 + (i2 - i1) = 0$$
$$5(i1 - i3) + 2(i1 - i2) + i1 = 6$$

   Sederhanakan persamaan tersebut dan gunakan metode determinan untuk memperoleh nilai i2!

BAB

3

PERSAMAAN LAPLACE UNTUK SISTEM KENDALI

Setelah mempelajari bab ini maka akan dipahami hal-hal berikut:

- ✓ Definisi transformasi Laplace.
- ✓ Sifat-sifat transformasi Laplace.
- ✓ Transformasi Laplace atas beberapa sinyal umum.
- ✓ Transformasi Laplace atas beberapa bentuk-gelombang umum.
- ✓ Transformasi Laplace balik dan formula-formulanya.

3.1. Introduksi

Dalam menganalisa mendesain serta merancang sistem teknik kendali analog penggunaan persamaan Laplace sangat penting. Penggunaan persamaan dalam kawasan waktu dalam bentuk persamaan diferensial sangat membantu untuk menyelesaikan, tetapi karena menggunakan kawasan dalam bilangan kompleks maka persamaan diferensial sangat sulit untuk menjelaskan semua ini. Dengan ditemukannya kawasan dalam bidang kompleks, maka persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan mudah. Dalam teknik kendali disebut dengan kawasan bidang (s).

Bentuk umum Persamaan Laplace adalah sebagai berikut:

3.2. Persamaan Laplace

Transformasi Laplace dari sebuah fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} f(t)\, dt, \text{untuk } \mathrm{s} > 0$$
$$= \lim_{\tau \to \sim} \int_0^\tau e^{-st} f(t) dt \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3-1)}$$

Lambang $\mathcal{L}$ pada persamaan (3-1) disebut dengan operator transformasi Laplace. Ada atau tidaknya solusi dari persamaan (3.1) tersebut tergantung apakah hasil integral dari persamaan (3-1) bernilai atau ada (konvergen) atau tidak bernilai atau tidak ada (divergen). Sehingga dalam perhitungan teknik terdapat adanya bilangan riil s_o sehingga integral (3-1) konvergen untuk s> s_o dan divergen untuk s< s_o, Himpunan nilai-nilai dari s> s_o sehingga (1) menjadi konvergen disebut dengan daerah ke konvergenan (*range of convergen*) atau keujudan (*existence*) dari $\mathcal{L}\{f(t)\}$, dalam kasus khusus dimungkinkan untuk divergen pada nilai s.

Mari kita perhatikan operator $\mathcal{L}$ apakah sebuah operator yang bersifat linier silakan simak persamaan berikut:

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t) + c_2 \mathcal{L} f_2(t)\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3-2)}$$

Dari persamaan (3-2) dapat dikatakan bahwa operator Laplace $\mathcal{L}$ adalah bersifat linier.

3.3. Persamaan Laplace untuk Fungsi-Fungsi Dasar

Dalam pembahasan ini akan diberikan beberapa penyelesaian transformasi Laplace dasar dengan daerah konvergensi (perhatikan daerah konvergensi) dalam bentuk tabel seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.1 Transformasi Laplace Dasar

No	$Fungsiwaktu\ f(t)$	$Transformasi\ Laplace$ $[\mathcal{L}f(t)] = F(s)$
1	$\delta(t)$: unit impuls ⍰	1 ⍰

No	$Fungsiwaktu\ f(t)$	$Transformasi\ Laplace$ $[\mathcal{L}f(t)] = F(s)$
2	$\mathrm{u}(t)$: unit step	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
3	t	$\frac{1}{s^2}$, $s > 0$
4	t^n	$\frac{n\,!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
5	t^p $p > -1$	$\frac{\tau(p+1)}{s^{p+1}}$, $s > 0$
6	e^{at}	$\frac{1}{(s-a)}$, $s > 0$
7	$\cos\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)}$, $s > 0$
8	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$, $s > 0$
9	$\sinh at$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)}$, $s > \lvert a \rvert$
10	$\cosh at$	$\frac{a}{(s^2+a^2)}$, $s > \lvert a \rvert$
11	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$, $s > 0$
12	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
13	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$, $s > 0$
14	$\frac{\omega}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}\sin[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t]$	$\frac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$, $s > 0$

No	$Fungsiwaktu\ f(t)$	$Transformasi\ Laplace$ $[\mathcal{L}f(t)] = F(s)$
15	$\frac{1}{T^n(n-1)!}t^{n-1}e^{-t/T}$	$\frac{1}{(1+sT)^n}, s > 0$
16	$1-\cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}, s > 0$
17	$1-e^{-t/T}\ 1-e^{-t/T}$ ▯	$\frac{1}{s(1+Ts)}, s > 0$
18	$1-\frac{t+T}{T}e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)^2}, s > 0$
19	$\frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}\sin[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t+\varphi]$ $dengan\ \varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{(1-\zeta^2)}}{-\zeta}$	$\frac{s\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}, s > 0$

Pada tabel urutan ke-5 (lima) fungsi $\tau(p+1)$ adalah fungsi gamma, yang didefinisikan oleh persamaan:

$$\tau(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx\ , p > -1 \text{ .... (3-3)}$$

Fungsi ini akan dipelajari pada materi khusus tentang fungsi gamma. Pada pembahasan ini hanya akan melihat sifat dari fungsi Gamma tersebut sebagai berikut:

$$\tau(p+1) = p\tau(p),\ \tau(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\ ,\ \tau(1) = 1 \text{ .... (3-4)}$$

3.4. Penyelesaian Persamaan Laplace

Berikut beberapa penyelesaian dari persamaan Laplace

Contoh 3.1. Jika diketahui sebuah fungsi $f(t) \equiv 1$ untuk $t \geq 1$ dapatkan transformasi Laplace-nya:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} f(t)\,\mathrm{dt} \\ &= \lim_{\tau\to\sim} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\tau \right) \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Jadi transformasi Laplace dari $f(t) \equiv 1$ untuk $t \geq 1$ adalah

Atau dengan cara lain

$$f(t) = 1, \mathcal{L}\{f(1)\} = F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\, 1\, dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\, dt = \left[\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\sim = \frac{1}{s}$$

Bila di jalankan pada *software* MATLAB adalah sebagai berikut;

Kode MATLAB

```
>> syms t
>> laplace (1)
ans =
1/s
```

Contoh 3.2 Jika diketahui sebuah fungsi $f(t) \equiv t$ untuk $t \geq 1$ dapatkan transformasi Laplace-nya

$$f(t) = t\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{t}\, dt = \left[-\frac{1}{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\right]_0^\sim + \int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\, dt = \frac{1}{s^2}$$

Jadi transformasi Laplace dari $f(t) \equiv t$ untuk $t \geq 1$ adalah $\frac{1}{s^2}$

Kode MATLAB

```
>> syms t
>> laplace (t)
ans =
1/s^2
```

Contoh 3.3 jika diketahui sebuah fungsi $f(t) = t^n$ dapatkan transformasi Laplace-nya

$f(t) = t^n \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} f(t)dt = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\, dt = = \frac{1}{s^2}$

Contoh 3.4 Jika diketahui sebuah fungsi $f(t) = e^{at}$ untuk $t \geq 1$ dapatkan transformasi Laplace-nya

$f(t) = t\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{at}\mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\, dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\mathrm{s+a})\mathrm{t}}\, dt$

$= \frac{1}{(s+a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\mathrm{s+a})\mathrm{t}}\, dt$

3.5. Persamaan Laplace *Inverse*

Persamaan Laplace *Inverse* adalah transformasi balik dari transformasi Laplace yang bentuk umumnya adalah sebagai berikut:

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{st} ds$ ....(3-5)

di mana notasi $\mathcal{L}\{f(t)\}$ menandakan transformasi Laplace atas suatu fungsi waktu $f(t)$, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ menyatakan transformasi Laplace balik, dan s adalah suatu variabel kompleks, dengan komponen riil σ dan komponen imajiner ω, yaitu $s = \sigma + j\omega$.

Pada kebanyakan kasus, didapati bahwa nilai-nilai waktu t lebih besar dari nilai referensi, katakanlah $t = t_0 = 0$, dan karena kondisi-kondisi awal pada umumnya diketahui, maka sepasang transformasi Laplace dua-sisi pada persamaan (4.1) dan (4.2) disederhanakan menjadi transformasi Laplace satu-sisi atau unilateral yang didefinisikan sebagai:

$\mathcal{L}\{f(t)\}F(s) \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ....(3-6)

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}f(t) \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{st} ds$..(3-7)

Transformasi Laplace pada persamaan (4.3) memiliki arti jika dan hanya jika integralnya konvergen (memiliki batas), yaitu jika

$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right| < \infty$ ....(3-8)

Untuk menentukan kondisi-kondisi yang bisa memastikan bahwa persamaan (3-8) konvergen, maka persamaan tersebut ditulis-ulang menjadi

$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt\right| < \infty$ ....(3-9)

Suku $e^{-j\omega t}$ pada persamaan (4.6) memiliki magnitudo satu, $\left|e^{-j\omega t}\right| = 1$, jadi kondisi agar terjadi konvergensi menjadi

$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}dt\right| < \infty$ ....(3-10)

Seringkali dijumpai dalam masalah-masalah keteknikan fungsi $f(t)$ dalam bentuk eksponensial. Jadi, persamaan (3-10) dapat diekspresikan menjadi

$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}dt\right| < \left|\int_0^\infty ke^{\sigma_0 t}e^{-\sigma t}dt\right|$ ....(3-11)

dan dapat diperhatikan bahwa integral pada sebelah kanan pertidaksamaan di atas konvergen jika dan hanya jika $\sigma > \sigma_0$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa jika fungsi $f(t)$ dalam bentuk eksponensial, maka $\mathcal{L}\{f(t)\}$ bisa dilakukan jika

$Re\{s\} = \sigma > \sigma_0$ ....(3-12)

di mana notasi $Re\{s\}$ menyatakan bagian riil dari variabel kompleks s. Untuk lebih menyederhanakan notasi, transformasi dari domain waktu ke domain frekuensi kompleks, dan sebaliknya, dinotasikan sebagai berikut

$f(t) \Leftrightarrow F(s)$..(3-13)

3.6. Sifat-Sifat Transformasi Laplace

3.6.1. Sifat linieritas

Sifat linieritas menyatakan bahwa jika $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ memiliki transformasi Laplace $F_1(s), F_2(s), \ldots, F_n(s)$ secara berturut-turut, dan jika diberikan konstanta-konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$, maka

$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) \Leftrightarrow c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + \cdots + c_n F(s)$.(3-14)

3.6.2. Sifat Pergeseran Waktu

Sifat pergeseran waktu menyatakan bahwa suatu pergeseran kanan sejauh a unit akan menghasilkan perkalian dengan e^{-as} pada domain frekuensi kompleks. Jadi,

$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}F(s)$ ....(3-15)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:

$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^a 0e^{-st}dt + \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt$ ....(3-16)

Sekarang, dimisalkan $t - a = \tau$; kemudian $t = \tau + a$ dan $dt = d\tau$. Dengan menyubstitusi mereka, integral kedua pada sebelah kanan persamaan (3-15) menjadi

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau = e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-as}F(s)$$

3.6.3. Sifat Pergeseran Frekuensi

Sifat pergeseran frekuensi menyatakan bahwa jika Anda mengalikan sembarang fungsi domain waktu $f(t)$ dengan suatu fungsi eksponensial e^{-at} di mana a adalah suatu konstanta positif, maka perkalian ini akan menghasilkan suatu pergeseran variabel s pada domain frekuensi kompleks sejauh a unit. Jadi,

$e^{-at}f(t) \Leftrightarrow F(s+a$ ....(3-17)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)dt = F(s+a)$$

3.6.4. Sifat Penskalaan

Diberikan a adalah sembarang konstanta positif; maka sifat penskalaan menyatakan bahwa

$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$ ....(3-18)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt$$

dan dimisalkan $t = {}^{\tau}/_{a}$, didapatkan

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s({}^{\tau}/_{a})}d({}^{\tau}/_{a}) = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-({}^{S}/_{a})\tau}d(\tau) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

3.6.5. Sifat Diferensiasi Pada Domain Waktu

Sifat diferensiasi pada domain waktu menyatakan bahwa diferensiasi pada domain waktu akan menghasilkan perkalian s pada domain frekuensi kompleks, dikurangi dengan nilai awal $f(t)$ pada saat $t = 0^-$. Jadi,

$\grave{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t) \Leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$ ....(3-21)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:

$$\mathcal{L}\{\grave{f}(t)\} = \int_0^\infty \grave{f}(t)e^{-st}dt$$

Menggunakan integral per bagian di mana

$\int vdu = uv - \int udv$..(3-22)

dimisalkan $du = \grave{f}(t)$ dan $v = e^{-st}$. Maka $u = f(t)$, $dv = -se^{-st}$, dan selanjutnya

$$\mathcal{L}\{\grave{f}(t)\} = f(t)e^{-st}|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)\,e^{-st}dt = \lim_{a\to\infty}[f(t)e^{-st}|_{0^-}^{a}] + sF(s)$$

$$= \lim_{a\to\infty}[e^{-sa}f(a) - f(0^-)] + sF(s) = 0 - f(0^-) + sF(s)$$

Sifat diferensiasi waktu dapat dikembangkan menjadi

$\frac{d^2}{dt^2}f(t) \Leftrightarrow s^2F(s) - sf(0^-) - \grave{f}(0^-)$ ....(3-23)

$\frac{d^3}{dt^3}f(t) \Leftrightarrow s^3F(s) - s^2f(0^-) - s\grave{f}(0) - f''(0^-)$ ....(3-24)

dan secara umum dapat diformulasikan menjadi

$\frac{d^n}{dt^n}f(t) \Leftrightarrow s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\grave{f}(0) - \cdots - f^{n-1}(0^-)$......(3-25)

3.6.6. Sifat Diferensiasi Pada Frekuensi Kompleks

Sifat ini menyatakan bahwa diferensiasi pada frekuensi kompleks dan perkalian dengan minus 1 akan menghasilkan perkalian antara $f(t)$ dengan t pada domain waktu. Dengan kata lain,

$tf(t) \Leftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$ .... (3-26)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Mendiferensiasi terhadap s, dan menerapkan aturan Leibnitz untuk diferensiasi di dalam integral, didapatkan

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt$$
$$= -\int_0^\infty [tf(t)]e^{-st}dt = -\mathcal{L}[tf(t)]$$

dan secara umum dapat diformulasikan menjadi

$t^nf(t) \Leftrightarrow (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$ ....(3-27)

3.6.7. Integrasi pada Domain Waktu

Sifat ini menyatakan bahwa integrasi pada domain waktu menyebabkan $F(s)$ dibagi dengan s ditambah dengan nilai awal $f(t)$ pada $t = 0^-$, yang juga dibagi dengan s. Yaitu,

$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f(0^-)}{s}$ ....(3-28)

Mari kita buktikan, perhatikan berikut ini:

Kita ekspresikan integral pada persamaan (4.28) menjadi dua buah integral

$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} f(\tau)d\tau$..(3-29)

Integral pertama pada sisi kanan persamaan (3-29) merepresentasikan suatu nilai konstan karena baik batas atas maupun batas bawah integral tersebut bukan merupakan fungsi waktu, dan konstanta ini dinotasikan dengan $f(0^{-})$. Selanjutnya, mencari transformasi Laplace atas konstanta ini, mencari transformasi Laplace atas integral kedua pada sisi kanan persamaan (3-28), maka persamaan (3-29) akan dibuktikan menggunakan sifat linieritas. Jadi,

$$\mathcal{L}\{f(0^{-})\} = \int_{0}^{\infty} f(0^{-})e^{-st}dt = f(0^{-})\int_{0}^{\infty} e^{-st}dt = f(0^{-})\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0}^{\infty}$$

$$= f(0^{-}) \times 0 - \left(-\frac{f(0^{-})}{s}\right) = \frac{f(0^{-})}{s}$$

Ini merupakan nilai integral pertama pada persamaan (3-28). Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa

$$\int_{0}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

Dimisalkan bahwa

$$g(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)d\tau$$

kemudian,

$$g'(t) = f(\tau)$$

dan

$$g(0) = \int_{0}^{0} f(\tau)d\tau = 0$$

Sekarang,

$\mathcal{L}\{g'(t)\} = G(s) = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0^{-}) = G(s) - 0$

$s\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{G(s)}{s}$

$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$ ....(3-30)

dan persamaan (3.-30) terbukti dari persamaan (3.-28) dan (3-29).

3.6.8. Integrasi pada domain frekuensi kompleks

Sifat ini menyatakan bahwa integrasi pada domain frekuensi kompleks terhadap s menyebabkan pembagian suatu fungsi waktu $f(t)$ oleh variabel t, dengan syarat jika dan hanya jika $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ ada. Jadi,

$\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_s^\infty F(s)\, ds$..(3-31)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Dengan mengintegralkan dua-sisi dari s sampai ∞, diperoleh

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right]ds$$

Berikutnya, dilakukan saling-tukar urutan integrasi, sehingga diperoleh

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_0^\infty\left[\int_s^\infty e^{-st}ds\right]f(t)dt$$

dan lakukan integrasi sebelah dalam terhadap s pada sisi kanan persamaan di atas, sehingga diperoleh

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_0^\infty\left[-\frac{1}{t}e^{-st}|_s^\infty\right]f(t)dt = \int_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

3.6.9. Sifat Periodisitas Waktu

Sifat periodisitas waktu menyatakan bahwa suatu fungsi waktu periodik dengan periode T akan menyebabkan integral $\int_0^T f(t)e^{-st}dt$ dibagi dengan $(1 - e^{-sT})$ pada domain frekuensi kompleks. Oleh karena itu, jika diberikan suatu fungsi periodik dengan periode T, yaitu $f(t) = f(t +$

$nT)$, untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$ maka akan didapatkan pasangan transformasi berikut ini.

$$f(t + nT) \Leftrightarrow \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1 - e^{-sT}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3-32)}$$

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:

Transformasi Laplace atas suatu fungsi periodik dapat diekspresikan sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{f(t)e^{-st}dt} + \int_{\mathrm{T}}^{2\mathrm{T}} \mathrm{f(t)e^{-st}dt} + \int_{2\mathrm{T}}^{3\mathrm{T}} \mathrm{f(t)e^{-st}dt} + \cdots$$

Integral pertama pada sisi kanan, dimisalkan $t = \tau$, pada integral kedua $t = \tau + T$, pada integral ketiga $t = \tau + 2T$, dan seterusnya. Luas area di bawah masing-masing periode $f(t)$ adalah sama, dan batas bawah dan batas atas integrasi juga sama pada tiap integral. Oleh karena itu,

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau + \int_0^T f(\tau + T)e^{-s(\tau+T)}d\tau + \int_0^T f(\tau + 2T)e^{-s(\tau+2T)}d\tau + \cdots$$

Karena fungsi tersebut adalah periodik, maka $f(\tau) = f(\tau + T) = f(\tau + 2T) = \cdots = f(\tau + nT)$, sehingga dapat dituliskan

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = (1 + e^{-sT} + e^{-2sT}) \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.33)}$$

Dengan mengaplikasikan teorema binomial, yaitu

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1 - a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.34)}$$

maka dapat dibuktikan bahwa persamaan (3-33) dapat direduksi menjadi

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1 - e^{-sT}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.35)}$$

3.6.10. Teorema Nilai Akhir

Teorema nilai akhir menyatakan bahwa nilai akhir $f(\infty)$ atas suatu fungsi waktu $f(t)$ dapat ditemukan dari transformasi Laplace-nya yang dikalikan dengan s, dengan $s \longrightarrow 0$. Yaitu,

$\lim_{t\longrightarrow\infty} f(t) = \lim_{s\longrightarrow 0} sF(s) = f(\infty)$ .... (3.36)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:
Dari sifat diferensiasi domain waktu,

$$\frac{d}{dt} f(t) \Leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

atau

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0^-) = \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt$$

Dengan menerapkan limit $s \longrightarrow 0$ pada dua sisi, diperoleh

$$\lim_{s\longrightarrow 0}[sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s\longrightarrow 0}\left[\lim_{\substack{T\longrightarrow\infty \\ \varepsilon\longrightarrow 0}} \int_\varepsilon^T \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt\right]$$

dan dengan melakukan saling-tukar proses limit, diperoleh

$$\lim_{s\longrightarrow 0}[sF(s) - f(0^-)] = \lim_{\substack{T\longrightarrow\infty \\ \varepsilon\longrightarrow 0}} \int_\varepsilon^T \frac{d}{dt} f(t) \left[\lim_{s\longrightarrow 0} e^{-st}\right] dt$$

dan karena

$$\lim_{s\longrightarrow 0} e^{-st} = 1$$

maka ekspresi di atas dapat direduksi menjadi

$$\lim_{s\longrightarrow 0}[sF(s) - f(0^-)] = \lim_{\substack{T\longrightarrow\infty \\ \varepsilon\longrightarrow 0}} \int_\varepsilon^T \frac{d}{dt} f(t) dt = \lim_{\substack{T\longrightarrow\infty \\ \varepsilon\longrightarrow 0}} \int_\varepsilon^T f(t)$$
$$= \lim_{\substack{T\longrightarrow\infty \\ \varepsilon\longrightarrow 0}} [f(T) - f(\varepsilon)] = f(\infty) - f(0^-)$$

dan oleh karena itu,

$$\lim_{s\longrightarrow 0} sF(s) = f(\infty)$$

3.6.11. Teorema Nilai Awal

Teorema nilai awal menyatakan bahwa nilai awal $f(0^-)$ atas suatu fungsi waktu $f(t)$ dapat ditemukan dari transformasi Laplace-nya yang dikalikan dengan s, dengan $s \longrightarrow \infty$. Yaitu,

$\lim_{t\longrightarrow 0} f(t) = \lim_{s\longrightarrow\infty} sF(s) = f(0^-)$..(3.37)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:
Dari sifat diferensiasi domain waktu,

$$\frac{d}{dt}f(t) \Leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

Atau

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0^-) = \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt$$

Dengan menerapkan limit $s \longrightarrow \infty$pada dua sisi, diperoleh

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}[sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s\longrightarrow\infty}\left[\lim_{\substack{T\longrightarrow\infty \\ \varepsilon\longrightarrow 0}} \int_\varepsilon^T \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt\right]$$

dan dengan melakukan saling-tukar proses limit, diperoleh

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}[sF(s) - f(0^-)] = \lim_{\substack{T\longrightarrow\infty \\ \varepsilon\longrightarrow 0}} \int_\varepsilon^T \frac{d}{dt}f(t)\left[\lim_{s\longrightarrow\infty} e^{-st}\right]dt$$

dan karena

$$\lim_{s\longrightarrow\infty} e^{-st} = 0$$

maka ekspresi di atas dapat direduksi menjadi

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}[sF(s) - f(0^-)] = 0$$

Atau

$$\lim_{s\longrightarrow\infty} sF(s) = f(0^-$$

3.6.12. Konvolusi pada Domain Waktu

Konvolusi pada domain waktu menyebabkan perkalian pada domain frekuensi kompleks, yaitu

$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$ ....(3-38)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-st}dt\right]d\tau\end{aligned}$$ ....(3-39)

Dimisalkan $t - \tau = \lambda$; kemudian, $t = \lambda + \tau$, dan $dt = d\lambda$. Dengan menyubstitusi mereka ke dalam persamaan (4-39),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-st}dt\right]d\tau \ \ldots\ldots\end{aligned}$$

3.6.13. Konvolusi pada Domain Frekuensi Kompleks

Konvolusi pada domain frekuensi kompleks dibagi dengan $1/2\pi j$ mengakibatkan perkalian pada domain waktu. Yaitu,

$f_1(t)\, f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$...(3-40)

Sebagai pembuktiannya, perhatikan berikut ini:

$\mathcal{L}\{f_1(t)\, f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f_1(t)\, f_2(t)\, e^{-st}dt$ ....(3-41)

dan dari transformasi Laplace balik pada persamaan (3-2)

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F_1(\mu)e^{\mu t}d\mu$$

dengan menyubstitusi persamaan di atas ke dalam persamaan (3-40), diperoleh

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\, f_2(t)\} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F_1(\mu)e^{\mu t}d\mu\right] f_2(t)\, e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F_1(\mu)\left[\int_0^\infty f_2(t)\, e^{-(s-\mu)t}dt\right]d\mu$$

Dapat diamati bahwa integral di dalam kurung siku adalah $F_2(s-\mu)$; oleh karena itu,

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\, f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F_1(\mu)F_2(s-\mu)d\mu = \frac{1}{2\pi j}F_1(s) * F_2(s)$$

Tabel 3.2 Kesimpulan Sifat dan Teorema Transformasi Laplace

No	Sifat/Teorema	Domain waktu	Domain frekuensi kompleks
1	Linieritas	$c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + \cdots + c_nf_n(t)$	$c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \cdots + c_nF(s)$
2	Pergeseran waktu	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
3	Pergeseran frekuensi	$e^{-at}f(t)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
4	Penskalaan waktu	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
5	Diferensiasi waktu	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s) - f(0^-)$
6	Diferensiasi frekuensi	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
7	Integrasi waktu	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f(0^-)}{s}$
8	Integrasi frekuensi	$\frac{f(t)}{t}$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
9	Periodisitas waktu	$f(t+nT)$	$\frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-sT}}$
10	Teorema nilai akhir	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty)$
11	Teorema nilai awal	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^-)$
12	Konvolusi waktu	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
13	Konvolusi frekuensi	$f_1(t)\, f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F_1(s) * F_2(s)$

3.7. Transformasi Laplace Atas Fungsi-Fungsi Waktu Umum

Pada bagian ini, akan dipresentasikan beberapa contoh untuk menemukan transformasi Laplace beberapa fungsi waktu yang umum ditemukan.

Contoh 3.5 Temukan $\mathcal{L}\{tu(t)\}$

Solusi: Dimulai dengan definisi transformasi Laplace, yaitu,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

dan untuk kasus ini,

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \int_{0}^{\infty} te^{-st}dt$$

Dengan melakukan integrasi per bagian seperti berikut

$$\int vdu = uv - \int udv.$$

dan memisalkan $u = t$ dan $dv = e^{-st}$, kemudian didapatkan $du = dt$ dan $v = \frac{-e^{-st}}{s}$. Dengan menyubstitusi mereka ke dalam persamaan (4-41), diperoleh

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{-te^{-st}}{s}\bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-e^{-st}}{s}dt = \frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^{\infty} \quad \text{......................(3-42)}$$

Karena batas atas integrasi pada persamaan (4.40) menghasilkan format yang tidak spesifik, maka akan diterapkan aturan L'Hopital, yaitu,

$$\lim_{t\to\infty} te^{-st} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{st}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{d}{dt}(t)}{\frac{d}{dt}(e^{st})} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{se^{st}} = 0$$

Dengan mengevaluasi suku kedua pada persamaan (3-42), maka akan diperoleh $\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$. Oleh karena itu, akan didapatkan pasangan transformasi Laplace sebagai berikut,

$$tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \text{...(3-43)}$$

Kode MATLAB

```
>> syms t
>> laplace(t*heaviside(t))
ans =
1/s^2
```

Contoh 3.6 Temukan $\mathcal{L}\{t^n u(t)\}$

Solusi: Untuk menemukan transformasi Laplace atas fungsi ini, pertama-tama perlu ditinjau kembali fungsi faktorial gamma yang didefinisikan sebagai

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \qquad \text{(3-43)}$$

Integral pada persamaan (3-43) merupakan suatu integral *improper* namun konvergen untuk semua $n > 0$. Sekarang akan diderivasi sifat-sifat dasar fungsi gamma, dan relasinya terhadap fungsi faktorial

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Integral pada persamaan (3.43) dapat dievaluasi dengan menggunakan integral per bagian. Oleh karena itu, pada persamaan (3.39) dimisalkan $u = e^{-x}$ dan $dv = x^{n-1}$, kemudian didapatkan $du = -e^{-x}dx$ dan $v = \frac{x^n}{n}$. Jadi, persamaan (3-43) dapat ditulis-ulang menjadi

$$\Gamma(n) = \left.\frac{x^n e^{-x}}{n}\right|_{x=0}^{\infty} + \frac{1}{n}\int_0^\infty x^n e^{-x} dx \qquad \text{(3-45)}$$

Dengan kondisi $n > 0$, suku pertama pada sebelah kanan (3-45) bernilai 0 pada batas bawah, $x = 0$. Dia juga bernilai nol pada batas bawah, $x = \infty$. Selanjutnya, pada suku kedua diterapkan aturan L'Hopital dengan mendiferensiasi kedua pembilang dan pembagi sebanyak m kali, di mana $m \geq n$. Didapatkan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n e^{-x}}{n} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{ne^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d^m}{dx^m}x^n}{\frac{d^m}{dx^m}ne^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}nx^n}{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}ne^x} = \cdots$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)x^{n-m}}{ne^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)x^{n-m}}{x^{m-n}e^x} = 0$$

Dengan demikian persamaan (3-45) dapat direduksi menjadi

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n}\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

dan dengan persamaan (3-44), diperoleh

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty x^n e^{-x} dx \qquad \text{(3-46)}$$

Dengan membandingkan integral-integral pada persamaan (3-46), dapat diamati bahwa

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad \text{(3-47)}$$

atau

$$\mathrm{n}\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \qquad \text{(3-48)}$$

Lebih nyaman untuk menggunakan persamaan (3-48) untuk $n < 0$ dan persamaan (3.46) untuk $n > 0$. Dari persamaan (3-47), dapat diperhatikan bahwa $\Gamma(n)$ menjadi tak-berhingga jika $n \to \infty$. Untuk $n = 1$, persamaan (3-46) menghasilkan

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\big|_0^\infty = 1 \qquad \text{(3-49)}$$

dan oleh karena itu, didapat relasi yang penting

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \text{(3-50)}$$

Dari hubungan pada persamaan (3-50), diperoleh

$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$

$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3.$ .... (3-51) dan secara umum dapat diformulasikan menjadi

$\Gamma(n+1) = n!$. ....(3-52)

untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$

Formula pada persamaan (3-52) penting untuk diperhatikan karena dia menetapkan hubungan antara $\Gamma(n)$ dengan $n!$. Sekarang kembali pada masalah untuk menemukan pasangan transformasi Laplace atas $t^n u(t)$, yaitu,

$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt$. . ...(3-53)

Untuk membuat integral pada persamaan di atas mirip dengan integral fungsi gamma, dimisalkan $st = y$, atau $t = y/s$, dan jadi $dt = dy/s$. Sekarang, persamaan (3-53) dapat ditulis-ulang menjadi

$$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{s}\right)^n e^{-y} d\left(\frac{y}{s}\right) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} (y)^n e^{-y} d(y) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Oleh karena itu, didapatkan pasangan transformasi Laplace sebagai berikut:

$t^n u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$...(3-54)

untuk integer-integer positif n dan $\sigma > 0$.

Contoh 3.7 Temukan $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$
Solusi: Dari persamaan transformasi Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt$$

dan menggunakan sifat *sifting* atas fungsi delta, maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s(0)} = 1$$

Jadi, kita memiliki pasangan transformasi Laplace sebagai berikut

$\delta(t) \Leftrightarrow 1$...(3-55)

untuk semua σ.

Kode MATLAB

```
>> syms t
>> laplace(dirac(t))
ans =
1
```

Contoh 3.8 Temukan $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}$
Solusi: Dari persamaan transformasi Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt$$

dan sekali lagi, menggunakan sifat *sifting* atas fungsi delta, maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt = e^{-as}$$

Jadi, kita memiliki pasangan transformasi Laplace sebagai berikut

$\delta(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}$ ....(3-56)

untuk semua $\sigma > 0$.

Kode MATLAB

```
>> syms t a
>> a=[1:10];
>> laplace(dirac(t-a))
ans =
[exp(-s), exp(-2*s), exp(-3*s), exp(-4*s), exp(-5*s), exp(-
6*s), exp(-7*s),
exp(-8*s), exp(-9*s),exp(-10*s)]
```

Contoh 3.9 Temukan $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}$

Solusi: Dari persamaan transformasi Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt$$

$$= \left(-\frac{1}{s+a}\right) e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+a}\text{.......................................(3-57)}$$

Jadi, kita memiliki pasangan transformasi Laplace sebagai berikut

$$e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+a}\text{..(3-58)}$$

untuk $\sigma > -a$.

Kode MATLAB

```
>> syms t a
>> laplace(exp(-a*t)*heaviside(t))
ans =
1/(s+a)
```

Contoh 3.10 Temukan $\mathcal{L}\{t^n e^{-at}u(t)\}$

Solusi: Untuk contoh ini, akan digunakan pasangan transformasi Laplace pada persamaan (3-56), yaitu,

$$t^n u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}\text{..(3-59)}$$

dan menggunakan sifat pergeseran frekuensi pada persamaan (3-56), yaitu,

$$e^{-at}f(t) \Leftrightarrow F(s+a)\text{ ....(3-60)}$$

Kemudian, menggantikan s dengan $s+a$ di dalam persamaan (3.56), maka akan diperoleh pasangan transformasi Laplace

$$t^n e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}\text{...(3-61)}$$

di mana n adalah suatu integer positif, dan $\sigma > -a$. Oleh karena itu, untuk $n = 1$, didapatkan pasangan transformasi Laplace

$te^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}$...(3-62)

untuk $\sigma > -a$. Untuk $n = 2$, diperoleh pasangan transformasi Laplace

$t^2e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{2!}{(s+a)^3}$..(3-63)

dan secara umum diformulasikan menjadi

$t^ne^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$. ....(3-63)

untuk $\sigma > -a$.

Kode MATLAB

```
>> syms t n
>> n=[1:10];
>> laplace(t.^n*exp(-a*t)*heaviside(t))
ans =
[1/(s+a)^2, 2/(s+a)^3, 6/(s+a)^4, 24/(s+a)^5,
120/(s+a)^6, 720/(s+a)^7, 5040/(s+a)^8, 40320/(s+a)^9,
362880/(s+a)^10, 3628800/(s+a)^11]
```

Contoh 3.11 Temukan $\mathcal{L}\{sin\omega tu(t)\}$
Solusi:

$$\mathcal{L}\{sin\omega t\ u(t)\} = \int_0^\infty sin\omega t\ e^{-st}dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a sin\omega t\ e^{-st}dt$$

dan perlu diketahui bahwa

$$\int \quad e^{ax}sinbx\ dx = \frac{e^{ax}(a\ sinbx - b\ cosbx)}{a^2+b^2}$$

Kemudian

$$\mathcal{L}\{sin\omega t\ u(t)\} = \lim_{a\to\infty} \frac{e^{-st}(-s\ sin\omega t - \omega\ cos\omega t)}{s^2+\omega^2}\Bigg|_0^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[\frac{e^{-as}(-s\ sin\omega a - \omega\ cos\omega a)}{s^2+\omega^2} + \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Jadi, telah didapatkan pasangan transformasi Laplace

$$sin\omega t\ u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

untuk $\sigma > 0$.

Kode MATLAB

```
>> syms t omega
>> laplace(sin(omega*t)*heaviside(t))
ans =
omega/(s^2+omega^2)
```

Contoh 3.12 Temukan $\mathcal{L}\{cos\omega tu(t)\}$
Solusi:

$$\mathcal{L}\{cos\omega t\ u(t)\} = \int_0^\infty cos\omega t\ e^{-st}dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a cos\omega t\ e^{-st}dt$$

dan perlu diketahui bahwa

$$\mathcal{L}\{cos\omega t\ u(t)\} = \int_0^\infty cos\omega t\ e^{-st}dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a cos\omega t\ e^{-st}dt$$

Kemudian

$$\mathcal{L}\{cos\omega t\ u(t)\} = \lim_{a\to\infty} \left.\frac{e^{-st}(-s\ cos\omega t+\omega sin\omega t)}{s^2+\omega^2}\right|_0^a$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-as}(-s\ cos\omega a+\omega\ sin\omega a)}{s^2+\omega^2}+\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Jadi, telah didapatkan pasangan transformasi Laplace

$cos\omega t\ u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$.. (3-64)

untuk $\sigma > 0$.

Kode MATLAB

```
>> syms t omega
>> laplace(cos(omega*t)*heaviside(t))
ans =
s/(s^2+omega^2)
```

Contoh 3.13 Temukan $\mathcal{L}\{e^{-at} sin\omega tu(t)\}$
Solusi:
Karena

$$sin\omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Menggunakan sifat pergeseran frekuensi pada persamaan (4-), yaitu,

$$e^{-at} f(t) \Leftrightarrow F(s+a) \qquad (3\text{-}65)$$

Dengan mengganti s dengan $s+a$, didapatkan

$$e^{-at} sin\omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}. \qquad (3\text{-}66)$$

untuk $\sigma > 0$ dan $a > 0$.

Kode MATLAB

```
>> syms t omega a
>> laplace(exp(-a*t)*sin(omega*t)*heaviside(t))
ans =
omega/((s+a)^2+omega^2)
```

Contoh 3.14 Temukan $\mathcal{L}\{e^{-at} cos\omega tu(t)\}$
Solusi:
Karena

$$cos\omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}. \qquad (3\text{-}66)$$

Menggunakan sifat pergeseran frekuensi pada persamaan (3-), dan dengan mengganti s dengan $s + a$, didapatkan

$e^{-at}\ cos\omega t\ u(t) \Leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$.. (3-67)

untuk $\sigma > 0$ dan $a > 0$.

Kode MATLAB

```
>> syms t omega a
>> laplace(exp(-a*t)*sin(omega*t)*heaviside(t))
ans =
omega/((s+a)^2+omega^2)
```

Demi kepentingan referensi, berikut akan disimpulkan kembali pasangan-pasangan transformasi Laplace atas beberapa sinyal umum.

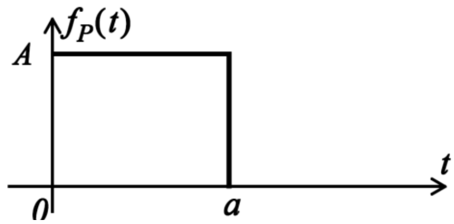
Tabel 3.3 Pasangan-Pasangan Transformasi Laplace Atas Beberapa Sinyal Umum

No	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s)}$
1	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
3	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\delta(t)$	1
5	$\delta(t-a)$	e^{-as}
6	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
7	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$sin\omega tu(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$cos\omega tu(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
10	$e^{-at}sin\omega tu(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
11	$e^{-at}cos\omega tu(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

3.8. Transformasi Laplace Atas Beberapa Bentuk-Gelombang Umum

Pada bagian ini, akan dipresentasikan beberapa contoh menderivasi transformasi Laplace atas beberapa bentuk-gelombang umum menggunakan Tabel 3.2 dan Tabel 3.3.

Contoh 3.15 Temukan transformasi Laplace atas bentuk-gelombang $f_P(t)$ pada Gambar 3.1 di bawah ini. Subskrip P menandakan pulsa atau kotak.



Gambar 3.1 Bentuk-Gelombang untuk Contoh 3-15

Solusi:

Pertama-tama bentuk-gelombang di atas diekspresikan sebagai penjumlahan fungsi-fungsi step unit.

$f_P(t) = A[u(t) - u(t-a)]$. .... (3-68)

Berikutnya, dari Tabel 3.2 diperoleh,

$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}F(s)$. .... (3-68)

dan dari Tabel 3.3 diperoleh,

$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$. .... (3-70)

Untuk contoh ini,

$$Au(t) \Leftrightarrow \frac{A}{s}$$

dan

$$Au(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}\frac{A}{s}$$

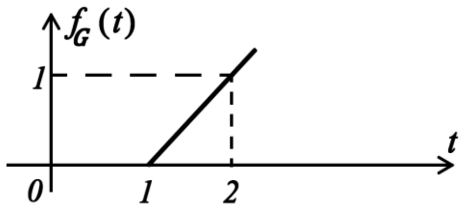
Kemudian, dengan menggunakan sifat linieritas, transformasi Laplace atas sinyal kotak pada Gambar 3-1 adalah

$$A[u(t)-u(t-a)] \Leftrightarrow \frac{A}{s} - e^{-as}\frac{A}{s} = \frac{A}{s}(1-e^{-as})$$

Kode MATLAB

```
>> syms A t
>> a=[1:5];
>> laplace(A*(heaviside(t)-heaviside(t-a)))
ans =
[A*(1/s-exp(-s)/s),A*(1/s-exp(-2*s)/s),A*(1/s-exp(-3*s)/s),
A*(1/s-exp(-4*s)/s), A*(1/s-exp(-5*s)/s)]
```

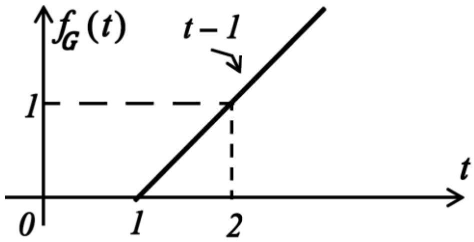
Contoh 3.16 Temukan transformasi Laplace atas bentuk-gelombang $f_G(t)$ pada Gambar 3.2 di bawah ini. Subskrip G menandakan garis.



Gambar 3.2 Bentuk-Gelombang untuk Contoh 3-16

Solusi:

Pertama-tama perlu diderivasi persamaan untuk segmen linier tersebut. Hal ini ditunjukkan pada Gambar 3.3. Berikutnya, diekspresikan bentuk-gelombang yang diberikan dengan suku-suku fungsi step unit.



Gambar 3.3 Bentuk-Gelombang pada Contoh 3-16 dengan Persamaan Atas Segmen Liniernya

Untuk contoh ini,

$$f_G(t) = (t-1)u(t-1)$$

dari Tabel 3.1 diperoleh,

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}F(s)$$

dan dari Tabel 3.3 diperoleh,

$$tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

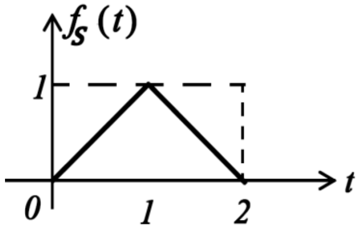
Oleh karena itu, transformasi Laplace atas segmen linier pada Gambar 3.2 adalah

$$(t-1)u(t-1) \Leftrightarrow e^{-as}\frac{1}{s^2}$$

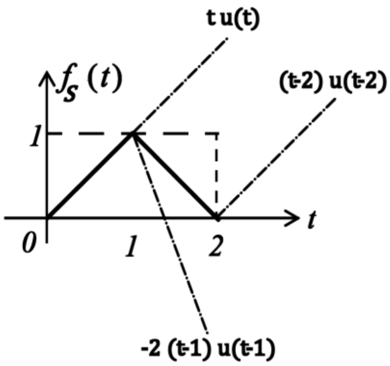
Kode MATLAB

```
>> syms t
>> laplace((t-1)*heaviside(t-1))
ans =
exp(-s)/s^2
```

Contoh 3.17 Temukan transformasi Laplace atas bentuk-gelombang segitiga $f_S(t)$ pada Gambar 3.4 di bawah ini.



Gambar 3.4 Bentuk-Gelombang untuk Contoh 3-17



Gambar 3.5 Bentuk-Gelombang Pada Contoh 3-17 Diekspresikan Sebagai Penjumlahan Fungsi-Fungsi Ramp Unit

Untuk contoh ini,

$$f_S(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

dari Tabel 3.2 diperoleh,

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}F(s)$$

dan dari Tabel 3.2 diperoleh,

$$tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

Kemudian

$$tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{1}{s^2}$$
$$tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

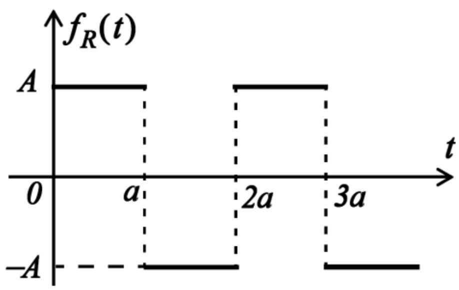
Oleh karena itu, transformasi Laplace atas bentuk-gelombang segitiga pada Gambar 3.4 adalah

$$f_S(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s})^2$$

Kode MATLAB

```
>> syms t
>>laplace(t*heaviside(t)-2*(t-1)*heaviside(t-1)+(t)*heaviside(t-2))
ans =
1/s^2-2*exp(-s)/s^2+exp(-2*s)/s^2
```

Contoh 3.18 Temukan transformasi Laplace atas bentuk-gelombang persegi-panjang $f_R(t)$ pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Bentuk-Gelombang untuk Contoh 3-18

Solusi:

Karena bentuk-gelombang tersebut periodik dengan periode $T = 2a$, maka perlu diterapkan sifat periodisitas waktu

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-sT}}$$

Untuk contoh ini,

$$\mathcal{L}\{f_R(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2as}}\int_0^{2a} f_R(t)\, e^{-st}dt$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\int_0^a A\, e^{-st}dt + \int_a^{2a}(-A)\, e^{-st}dt\right]$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\frac{-e^{-st}}{s}\bigg|_0^a + \frac{e^{-st}}{s}\bigg|_a^{2a}\right]$$

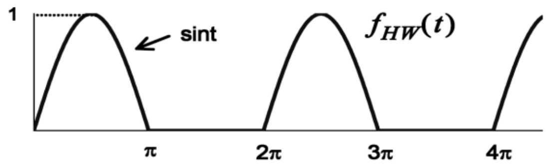
Atau

$$\{f_R(t)\} = \frac{A}{s(1-e^{-2as})}(-e^{-as} + 1 + e^{-2as} - e^{-as})$$
$$= \frac{A}{s(1-e^{-2as})}(1 - 2e^{-as} + e^{-2as}) = \frac{A(1-e^{-as})^2}{s(1+e^{-as})(1-e^{-as})}$$
$$= \frac{A(1-e^{-as})}{s(1+e^{-as})} = \frac{A}{s}\left(\frac{e^{as/2}e^{-as/2} - e^{-as/2}e^{-as/2}}{e^{as/2}e^{-as/2} + e^{-as/2}e^{-as/2}}\right)$$
$$= \frac{A}{s}\frac{e^{-as/2}}{e^{-as/2}}\left(\frac{e^{as/2} - e^{-as/2}}{e^{as/2} + e^{-as/2}}\right) = \frac{A}{s}\frac{\sinh\left(\frac{as}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{as}{2}\right)}$$

Atau

$$\mathrm{f_R(t)} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}\tanh\left(\frac{\mathrm{as}}{2}\right). \qquad \text{(3-71)}$$

Contoh 3.19 Temukan transformasi Laplace atas bentuk-gelombang persegi-panjang $f_{HW}(t)$ pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Bentuk-Gelombang pada Contoh 3-19

Solusi:

Karena bentuk-gelombang tersebut periodik dengan periode $T = 2\pi$, maka perlu diterapkan sifat periodisitas waktu

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-sT}}$$

Untuk contoh ini,

$$\mathcal{L}\{f_{HW}(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} f_{HW}(t)\, e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} sint\, e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{e^{-st}(s\, sint - cost)}{s^2+1}\bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{s^2+1}\frac{(1+e^{-\pi s})}{(1-e^{-2\pi s})}$$

$$\mathcal{L}\{f_{HW}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}\frac{(1+e^{-\pi s})}{(1+e^{-\pi s})(1-e^{-\pi s})} = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{(1-e^{-\pi s})} \quad \text{..........................(3-72)}$$

3.9. Transformasi Laplace Balik

Pada sub-bab ini adalah kelanjutan dari topik transformasi Laplace. Metode ekspansi fraksi parsial akan dijelaskan secara detail dan akan diilustrasikan dengan beberapa contoh.

3.9.1. Integral Transformasi Laplace Balik

Integral transformasi Laplace balik telah diekspresikan sebelumnya. Namun demi kenyamanan pembaca akan diekspresikan di sini kembali

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}ds. \quad \text{......................................(3-73)}$$

Integral di atas cukup sulit untuk dievaluasi karena akan membutuhkan integrasi kontur menggunakan teori variabel kompleks. Untungnya, untuk kebanyakan masalah keteknikan, Anda dapat merujuk kepada tabel sifat, dan pasangan transformasi Laplace yang umum untuk menemukan transformasi Laplace-nya.

3.9.2. Ekspansi Fraksi Parsial

Sangat sering ditemukan ekspresi-ekspresi transformasi Laplace dalam bentuk yang tidak dikenal, namun pada kebanyakan kasus mereka muncul dalam suatu bentuk rasional, yaitu,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{.....(3-74)}$$

di mana $N(s)$ dan $D(s)$ adalah polinomial, jadi persamaan (3.73) dapat diekspresikan menjadi,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad \text{.....(3-75)}$$

Koefisien-koefisien a_0 dan b_0 adalah bilangan riil untuk $k = 1, 2, \dots, n$, dan jika pangkat tertinggi m dari $N(s)$ lebih rendah dari pangka tertinggi n dari $D(s)$, atau dengan kata lain $m < n$, maka $F(s)$ dikatakan sebagai suatu fungsi rasional layak (*proper rational function*). Jika $m > n$, $F(s)$ dikatakan sebagai suatu fungsi rasional tak-layak (*improper rational function*).

Dalam suatu fungsi rasional layak, akar-akar $N(s)$ dalam persamaan (3.74) dicari dengan menetapkan $N(s) = 0$; akar-akar tersebut disebut juga dengan Nol dari $F(s)$. Akar-akar $D(s)$ ditemukan dengan menetapkan $D(s) = 0$, yang disebut Kutub dari $F(s)$. Diasumsikan $F(s)$ pada persamaan (3.74) adalah suatu fungsi rasional layak, maka akan sangat membantu untuk membuat koefisien s^n menjadi 1.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{a_n}\left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0\right)}{s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}s^{n-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}s + \frac{a_0}{a_n}} \quad \text{.....(3-76)}$$

Nol dan Kutub dari persamaan (3.75) bisa jadi riil dan berbeda, atau berulang, atau kompleks konjugasi, atau kombinasi riil dan kompleks konjugasi. Agar lebih dipahami, akan disajikan setiap kasus secara terpisah

Kasus-I Kutub yang berbeda

Jika semua kutub $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$dari $F(s)$ berbeda-beda (berbeda satu sama lain), maka denominator $F(s)$ dapat difaktorkan menjadi bentuk

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot(s-p_3)\cdot\ldots(s-p_n)} \dots\dots\dots\dots (3\text{-}77)$$

di mana p_k berbeda satu sama lain. Berikutnya, dengan menggunakan metode ekspansi fraksi parsial, maka persamaan (3.76) dapat diekspresikan menjadi

$$F(s) = \frac{r_1}{(s-p_1)} + \frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} + \cdots + \frac{r_n}{(s-p_n)} \dots\dots\dots\dots (3\text{-}78)$$

di mana $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ adalah sisa-sisa dan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ adalah kutub-kutub dari $F(s)$. Untuk mengevaluasi sisa-sisa r_k, maka pada kedua sisi persamaan (3.77) dikalikan dengan $(s - p_k)$; jika $s \to p_k$ maka

$$r_k = \lim_{s \to p_k}(s - p_k)F(s) = (s - p_k)F(s)|_{s=p_k} \dots\dots\dots\dots (3\text{-}79)$$

Contoh 3.20 Gunakan metode ekspansi fraksi parsial untuk menyederhanakan $F(s)$ pada persamaan (3.79) di bawah ini, dan temukan fungsi domain waktu $f(t)$.

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} \dots\dots\dots\dots (3\text{-}80)$$

Solusi: Menggunakan persamaan (3.76), diperoleh

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{r_1}{(s+1)} + \frac{r_2}{(s+2)} \dots\dots\dots\dots (3\text{-}81)$$

Sisa-sisa yang didapatkan adalah

$$r_1 = \lim_{s \to -1}(s + 1)F(s) = \left.\frac{3s+2}{(s+2)}\right|_{s=-1} = -1. \dots\dots\dots\dots (3\text{-}82)$$

Dan

$r_2 = \lim_{s \to -2} (s+2)F(s) = \left.\frac{3s+2}{(s+1)}\right|_{s=-2} = 4$ ....(3-83)

Jadi, persamaan (3.80) dapat diekspresikan menjadi

$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{4}{(s+2)}$...(3-84)

dan dari Tabel 3.3 didapatkan bahwa

$\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\mathrm{u}(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{s+a}}$.. (3-85)

Kemudian,

$F(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{4}{(s+2)} \leftrightarrow (-e^{-t} + 4e^{-2t})u(t) = f(t)$ ....(3-84)

Sisa-sisa dan kutub-kutub dari persamaan (3.79) dapat dengan mudah didapatkan menggunakan fungsi MATLAB residue(a,b). Pada contoh ini, *script* MATLAB yang digunakan adalah

Kode MATLAB

```
>> Ns=[3,2]; Ds=[1,3,2];[r,p,k]=residue(Ns,Ds)
r =
      4
     -1
p =
     -2
     -1
k =
      []
```

Pada *script* MATLAB tersebut, didefinisikan Ns dan Ds sebagai dua vektor yang memuat koefisien-koefisien pembilang dan penyebut dari $F(s)$. Saat kode itu dieksekusi, MATLAB menampilkan vektor-vektor r dan p yang merepresentasikan sisa-sisa dan kutub-kutub secara berturut-turut. Nilai pertama vektor r berkaitan dengan nilai pertama vektor p, nilai kedua vektor r berkaitan dengan nilai kedua vektor p, dan begitu seterusnya. Vektor k diistilahkan sebagai suku langsung atau *direct term* dan selalu kosong jika $F(s)$ merupakan fungsi rasional layak, di mana derajar tertinggi penyebut lebih besar dari derajat tertinggi pembilang. Pada kasus ini, dapat diamati bahwa pangkat tertinggi penyebut adalah s^2, sedangkan pangkat tertinggi pembilang adalah s.

Anda juga dapat menggunakan fungsi MATLAB ilaplace untuk mendapatkan fungsi domain waktu secara langsung dari $F(s)$. Hal ini dilakukan dengan *script* MATLAB berikut ini.

Kode MATLAB

```
>> syms s t; Fs=(3*s+2)/(s^2+3*s+2);ft=ilaplace(Fs);pretty(ft)
   4 exp(-2 t) - exp(-t)
```

Contoh 3.21 Gunakan metode ekspansi fraksi parsial untuk menyederhanakan $F(s)$ pada persamaan (3.86) di bawah ini, dan temukan fungsi domain waktu $f(t)$.

$$F(s) = \frac{3s^2+2s+5}{s^3+12s^2+44s+48} \quad \text{(3-85)}$$

Solusi: akan digunakan fungsi simbolik MATLAB factor() untuk mengekspresikan polinomial penyebut dari $F(s)$ dalam format terfaktor. Untuk kasus ini,

Kode MATLAB

```
>> syms s; factor(s^3+12*s^2+44*s+48)
ans =
(s+4)*(s+2)*(s+6)
```

Kemudian,

$$F(s) = \frac{3s^2+2s+5}{s^3+12s^2+44s+48} = \frac{3s^2+2s+5}{(s+2)(s+4)(s+6)} = \frac{r_1}{(s+2)} + \frac{r_2}{(s+4)} + \frac{r_3}{(s+6)} \text{.......(3-86)}$$

Sisa-sisa adalah

$$r_1 = \left.\frac{3s^2+2s+5}{(s+4)(s+6)}\right|_{s=-2} = \frac{9}{8} \text{........ (3-87)}$$

$$r_2 = \left.\frac{3s^2+2s+5}{(s+2)(s+6)}\right|_{s=-4} = -\frac{37}{4} \text{........ (3-88)}$$

$$r_3 = \left.\frac{3s^2+2s+5}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=-6} = \frac{89}{8} \text{........ (3-89)}$$

Kemudian, dengan menyubstitusikan ketiga sisa ke dalam persamaan (3-85), didapatkan

$$F(s) = \frac{3s^2+2s+5}{s^3+12s^2+44s+48} = \frac{\frac{9}{8}}{(s+2)} + \frac{-\frac{37}{4}}{(s+4)} + \frac{\frac{89}{8}}{(s+6)} \text{........ (3-90)}$$

Dari Tabel 3.3

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \text{........(3-90)}$$

Kemudian

$$F(s) = \frac{\frac{9}{8}}{(s+2)} + \frac{-\frac{37}{4}}{(s+4)} + \frac{\frac{89}{8}}{(s+6)} \leftrightarrow \left(\frac{9}{8}e^{-2t} - \frac{37}{4}e^{-4t} + \frac{89}{8}e^{-6t}\right)u(t) = f(t) \text{...(3-91)}$$

Kode MATLAB:

```
>> syms s t;
Fs=(3*s^2+4*s+5)/(s^3+12*s^2+44*s+48);ft=ilaplace(Fs)
ft =
-37/4*exp(-4*t)+9/8*exp(-2*t)+89/8*exp(-6*t)
>> syms s t;
Fs=(3*s^2+4*s+5)/(s^3+12*s^2+44*s+48);ft=ilaplace(Fs)
ft =
-37/4*exp(-4*t)+9/8*exp(-2*t)+89/8*exp(-6*t)
```

Kasus-II Kutub kompleks

Sering Anda jumpai kutub-kutub $F(s)$ kompleks, dan karena kutub-kutub kompleks terjadi pada pasangan-pasangan kojugasi kompleks, maka jumlah kutub genap. Jadi, jika p_k adalah suatu akar kompleks $D(s)$, maka kutub konjugasi kompleksnya, p_k^*, juga akar $D(s)$. Metode ekspansi fraksi parsial dapat digunakan pada kasus ini, tetapi perlu dilakukan manipulasi suku-suku ekspansi untuk mengekspresikan mereka dalam format yang dapat dikenali. Prosedur ini diilustrasikan pada contoh berikut ini.

Contoh 3.22 Gunakan metode ekspansi fraksi parsial untuk menyederhanakan $F(s)$ pada persamaan (3.94) di bawah ini, dan temukan fungsi domain waktu $f(t)$.

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3+5s^2+12s+8} \quad \text{(3-92)}$$

Solusi: Pertama, perlu diekspresikan penyebut dalam format terfaktor untuk mengidentifikasi kutub-kutub $F(s)$ menggunakan fungsi MATLAB factor(). Kemudian

Kode MATLAB:

```
>> syms s; factor(s^3+5*s^2+12*s+8)
ans =
(s+1)*(s^2+4*s+8)
```

Fungsi MATLAB factor() tidak memfaktorkan suku kuadratik di atas. Maka, akan digunakan fungsi MATLAB roots()

Kode MATLAB:

```
>> p=[1 4 8];akar=roots(p)
akar =
```

```
 -2.0000 + 2.0000i
 -2.0000 - 2.0000i
```

```
>> p=[1 4 8];akar=roots(p)
akar =
 -2.0000 + 2.0000i
 -2.0000 - 2.0000i
```

Maka,

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3+5s^2+12s+8} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2+j2)(s+2-j2)} = \frac{r_1}{(s+1)} + \frac{r_2}{(s+2+j2)} + \frac{r_2^*}{(s+2-j2)}. \quad (3\text{-}93)$$

Sisa-sisa adalah

$$r_1 = \left.\frac{s+3}{(s^2+4s+8)}\right|_{s=-1} = \frac{2}{5}. \quad (3\text{-}94)$$

$$r_2 = \left.\frac{s+3}{(s+1)(s+2-j2)}\right|_{s=-2-j2} = -\frac{1}{5} + \frac{j3}{20} \quad (3\text{-}95)$$

$$r_2 = \left.\frac{s+3}{(s+1)(s+2-j2)}\right|_{s=-2-j2} = -\frac{1}{5} + \frac{j3}{20} \quad (3\text{-}96)$$

Dengan menyubstitusikan sisa-sisa di atas ke dalam persamaan (3-93)

$$F(s) = \frac{\frac{2}{5}}{(s+1)} + \frac{-\frac{1}{5}+\frac{j3}{20}}{(s+2+j2)} + \frac{-\frac{1}{5}-\frac{j3}{20}}{(s+2-j2)} \quad (3\text{-}97)$$

Dua suku terakhir pada persamaan di atas tidak memiliki kemiripan dengan pasangan-pasangan transformasi Laplace yang telah diderivasi, maka mereka akan diekspresikan dalam format yang berbeda, dan dikombinasikan menjadi satu suku.

$$F(s) = \frac{\frac{2}{5}}{(s+1)} - \frac{1}{5}\frac{(2s+1)}{(s^2+4s+8)} \quad (3\text{-}98)$$

Agar lebih mudah dipahami, suku pertama pada persamaan (3-98) dinotasikan sebagai $F_1(s)$, dan suku kedua sebagai $F_2(s)$. Kemudian diperoleh,

$$F_1(s) = \frac{\frac{2}{5}}{(s+1)} \leftrightarrow \frac{2}{5}e^{-t} = f_1(t) \quad \text{....(3-99)}$$

Berikutnya untuk $F_2(s)$

$$F_2(s) = -\frac{1}{5}\frac{(2s+1)}{(s^2+4s+8)} \quad \text{....(3-100)}$$

dan dengan mengingat bahwa

$$e^{-at}sin\omega t\ u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \quad \text{....(3-101)}$$

$$e^{-at}cos\omega t\ u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \quad \text{....(3-102)}$$

Maka $F_2(s)$ dapat diekspresikan menjadi

$$F_2(s) = -\frac{1}{5}\frac{(2s+1)}{(s^2+4s+8)} = -\frac{2}{5}\left(\frac{(s+2)}{(s+2)^2+2^2}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right) \quad \text{....(3-103)}$$

Penjumlahan persamaan (3.102) dengan (3.103) menghasilkan

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{\frac{2}{5}}{(s+1)} - \frac{2}{5}\left(\frac{(s+2)}{(s+2)^2+2^2}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right) \quad \text{....(3-104)}$$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) \leftrightarrow \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{-2t}cos2t + \frac{3}{10}e^{-2t}sin2t \quad \text{....(3-105)}$$

Pemeriksaan dengan MATLAB:

```
>> syms a s t w; %mendefinisikan beberapa variabel simbolik
>> Fs=(s+3)/(s^3+5*s^2+12*s+8);ft=ilaplace(Fs)
ft =
-2/5*exp(-2*t)*cos(2*t)+3/10*exp(-2*t)*sin(2*t)+2/5*exp(-t)
```

Kasus-III Kutub-kutub berulang

Pada kasus ini, $F(s)$ memiliki salah satu dari kutub-kutubnya, katakan p_1, berulang sebanyak m kali. Pada kondisi ini, $F(s)$ diekspresikan sebagai

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^m(s-p_2)\ldots(s-p_{n-1})(s-p_n)} \quad \text{...(3-106)}$$

Dengan menotasikan sebanyak m buah sisa terkait dengan kutub p_1 sebagai $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1m}$, maka ekspansi fraksi parsial pada persamaan (4.109) dapat ditulis-ulang sebagai

$$F(s) = \frac{r_{11}}{(s-p_1)^m} + \frac{r_{12}}{(s-p_1)^{m-1}} \ldots + \frac{r_{1m}}{(s-p_1)} + \frac{r_2}{(s-p_2)} \ldots + \frac{r_n}{(s-p_n)} \quad \text{...........(3-107)}$$

Untuk kutub-kutub $p_1, p_2, \ldots, p_n$, dicari dengan cara yang sama dengan sebelumnya, yaitu

$$r_k = \lim_{s \to p_k}(s - p_k)\, F(s) = (s - p_k)F(s)|_{s=p_k} \text{...........................(3-108)}$$

Sisa-sisa $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1m}$ terkait dengan kutub yang berulang dicari dengan perkalian sisi kanan persamaan (3-108) dengan $(s - p_1)^m$.

$$(s - p_1)^m F(s) = r_{11} + (s - p_1)r_{12} \ldots + (s - p_1)^{m-1} r_{1m}$$
$$+(s - p_1)^m \left(\frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} \ldots + \frac{r_n}{(s-p_n)}\right) \quad \text{..........(3-109)}$$

Berikutnya, dengan mengambil limit $s \to p_1$ pada kedua sisi persamaan (3-109), diperoleh

$$\lim_{s \to p_1}(s - p_1)^m F(s) = r_{11} + \lim_{s \to p_1}[(s - p_1)r_{12} \ldots + (s - p_1)^{m-1} r_{1m}]$$
$$+\lim_{s \to p_1}\left[(s - p_1)^m \left(\frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} \ldots + \frac{r_n}{(s-p_n)}\right)\right] \text{......(3-110)}$$

atau

$$r_{11} = \lim_{s \to p_1}(s - p_1)^m F(s) \quad \text{...(3-111)}$$

Jadi, persamaan (3-111) menghasilkan sisa dari kutub berulang yang pertama. Sisa r_{12} untuk kutub berulang yang kedua, p_1, dicari dengan mendiferensialkan persamaan (3-111) terhadap s, dan sekali lagi diambil limit $s \to p_1$, yaitu

$$r_{12} = \lim_{s \to p_1}\frac{d}{ds}[(s - p_1)^m F(s)] \quad \text{...(3-112)}$$

Pada umumnya, sisa r_{1k} dapat ditemukan dari

$(s-p_1)^m F(s) = r_{11} + r_{12}(s-p_1) + r_{13}(s-p_1)^2$ .... (3-113)

yang memiliki derivatif yang ke-$(m-1)$ pada kedua sisi

$(k-1)!\, r_{1k} = \lim\limits_{s\to p_1} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(s-p_1)^m F(s)]$ .... (3-114)

Atau

$r_{1k} = \lim\limits_{s\to p_1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(s-p_1)^m F(s)]$ .... (3-115)

Contoh 3.23 Gunakan metode ekspansi fraksi parsial untuk menyederhanakan $F(s)$ pada persamaan (4.119) di bawah ini, dan temukan fungsi domain waktu $f(t)$.

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2}$$

Solusi: Dapat diamati bahwa terdapat kutub $s=-1$ yang berulang sebanyak 2 kali. Oleh karena itu, format ekspansi fraksi parsial dapat ditulis menjadi

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{r_1}{(s+2)} + \frac{r_{21}}{(s+1)^2} + \frac{r_{22}}{(s+1)}$$

Sisa-sisa diperoleh dengan cara

$$r_1 = \left.\frac{s+3}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = 1$$

$$r_{21} = \left.\frac{s+3}{s+2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$r_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s+3}{s+2}\right)\right|_{s=-1} = \left.\frac{(s+2)-(s+3)}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -1$$

Akhirnya,

$F(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{-1}{(s+1)} \leftrightarrow e^{-2t} + 2te^{-t} - e^{-t} = f(t)$ (3-116)

Hasil pemeriksaan MATLAB:

```
>> syms s t; Fs=(s+3)/((s+2)*(s+1)^2); ft=ilaplace(Fs)
ft =
exp(-2*t)+(-1+2*t)*exp(-t)
```

Anda juga dapat memeriksa ekspansi fraksi parsial menggunakan kode MATLAB berikut ini.

```
>> syms s
>> Ns=[1 3];            % koefisien-koefisien pembilang Ns
>> expand((s+1)^2);     % Ekspansi (s+1)^2 menjadi
                          s^2+2*s+1
>> d1=[1 2 1];          % koefisien-koefisien
                        % (s+1)^2=s^2+2*s+1 dari Ds
>> d2=[0 1 2];          % koefisien-koefisien (s+2)dari Ds
>> Ds=conv(d1,d2);      % mengalikan polinomial d1 dan d2
>> [r,p,k]=residue(Ns,Ds)
r =
   1.0000
  -1.0000
   2.0000
p =
  -2.0000
  -1.0000
  -1.0000
k =
     []
```

7

Contoh 3.24 Gunakan metode ekspansi fraksi parsial untuk menyederhanakan $F(s)$ pada persamaan (3.121) di bawah ini, dan temukan fungsi domain waktu $f(t)$.

$$F(s) = \frac{s^2+3s+1}{(s+1)^3(s+2)^2} \quad \text{.......................................}(3\text{-}117)$$

Solusi: Dapat diamati bahwa kutub $s = -1$ berulang sebanyak 3 kali dan kutub $s = -2$ berulang sebanyak 2 kali. Kemudian, format ekspansi parsial, $F(s)$, dapat ditulis sebagai

$$F(s) = \frac{r_{11}}{(s+1)^3} + \frac{r_{12}}{(s+1)^2} + \frac{r_{13}}{(s+1)} + \frac{r_{21}}{(s+2)^2} + \frac{r_{22}}{(s+2)} \qquad \text{(3-118)}$$

Sisa-sisa yang didapatkan adalah

$$r_{11} = \left.\frac{s^2+3s+1}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -1$$

$$r_{12} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+3s+1}{(s+2)^2}\right)\Big|_{s=-1} = \left.\frac{s+4}{(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 3$$

$$r_{13} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s^2+3s+1}{(s+2)^2}\right)\Big|_{s=-1} = \left.\frac{-s-5}{(s+2)^4}\right|_{s=-1} = -4$$

Berikutnya, untuk kutub pada $s = -2$,

$$r_{21} = \left.\frac{s^2+3s+1}{(s+1)^3}\right|_{s=-2} = 1$$

$$r_{22} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+3s+1}{(s+1)^3}\right)\Big|_{s=-2} = \left.\frac{-s^2-4s}{(s+1)^4}\right|_{s=-2} = 4$$

Dengan menyubstitusi sisa-sisa di atas ke dalam persamaan (3-118), diperoleh

$$F(s) = \frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{-4}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)} \qquad \text{(3-119)}$$

Hasil pemeriksaan MATLAB ditemukan:

```
    >> syms s;  %  fungsi  collect()  untuk  mengalikan  (s+1)^3
dengan (s+2)^2
    >> Ds=collect(((s+1)^3)*((s+2)^2))
    Ds =
    4+s^5+7*s^4+19*s^3+25*s^2+16*s
    >> Ns=[1 3 1]; Ds=[1 7 19 25 16 4]; [r,p,k]=residue(Ns,Ds)
    r =
       4.0000
        1.0000
       -4.0000
        3.0000
       -1.0000
    p =
       -2.0000
       -2.0000
       -1.0000
       -1.0000
       -1.0000
    k =
         []
```

Dari Tabel 3.3 didapatkan,

$$e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, te^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}, t^{n-1}e^{-at} \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(s+a)^n} \ldots \quad (3\text{-}120)$$

Dengan pemahaman di atas, maka $f(t)$ dapat diderivasi dari persamaan (3.119)

$$f(t) = -\frac{1}{2}t^2e^{-t} + 3te^{-t} - 4e^{-t} + te^{-2t} + 4e^{-2t} \quad (3\text{-}121)$$

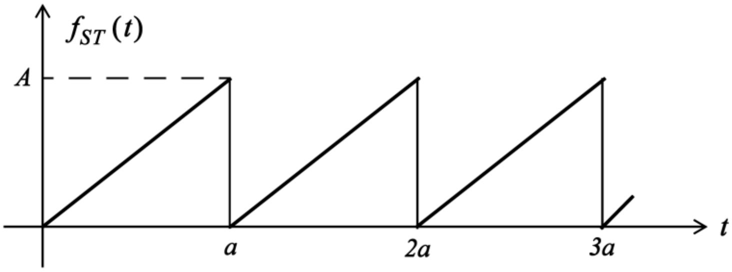
Hasil pemeriksaan MATLAB ditemukan:

```
>> syms s t; Fs=-1/((s+1)^3)+3/((s+1)^2)-
4/(s+1)+1/((s+2)^2)+4/(s+2);
>> ft=ilaplace(Fs)
ft =
(-1/2*t^2+3*t-4)*exp(-t)+(t+4)*exp(-2*t)
```

LATIHAN

1) Temukan transformasi Laplace dari fungsi-fungsi domain waktu berikut ini.
   a) $(t^2 + 3t^2 + 4t + 3)u(t)$
   b) $3(2t - 3)\delta(t - 3)$
   c) $(3 \sin 5t)u(t)$
   d) $(5 \cos 3t)u(t)$
   e) $(2 \tan 4t)u(t)$
2) Temukan transformasi Laplace dari fungsi-fungsi domain waktu berikut ini.
   a) $3t(\sin 5t)u(t)$
   b) $2t^2(\cos 3t)u(t)$
   c) $2e^{-5t} \sin 5t$
   d) $8e^{-3t} \cos 4t$
   e) $(\cos t)\delta(t - \pi/4)$
3) Temukan transformasi Laplace dari fungsi-fungsi domain waktu berikut ini.
   a) $5tu(t - 3)$
   b) $(2t^2 - 5t + 4)u(t - 3)$
   c) $(t - 3)e^{-2t}u(t - 2)$
   d) $(2t - 4)e^{2(t-2)}u(t - 3)$
   e) $4te^{-3t}(\cos 2t)u(t)$
4) Temukan transformasi Laplace dari fungsi-fungsi domain waktu berikut ini.
   a) $\frac{d}{dt}(\sin 3t)$
   b) $\frac{d}{dt}(3e^{-4t})$
   c) $\frac{d}{dt}(t^2 \cos 2t)$
   d) $\frac{d}{dt}(e^{-2t} \sin 2t)$
   e) $\frac{d}{dt}(t^2 e^{-2t})$

5) Temukan transformasi Laplace atas bentuk-gelombang gigi-gergaji, f_{ST}, pada Gambar 4.8 di bawah ini.



Gambar 3.8 Bentuk Gelombang pada Latihan No. 5

6) Temukan transformasi Laplace balik berikut ini.

a) $\frac{4}{s+3}$

b) $\frac{4}{(s+3)^2}$

c) $\frac{4}{(s+3)^4}$

d) $\frac{3s+4}{(s+3)^5}$

e) $\frac{s^2+6s+3}{(s+3)^5}$

7) Temukan transformasi Laplace balik berikut ini.

a) $\frac{3s+4}{s^2+4s+85}$

b) $\frac{4s+5}{s^2+5s+18.5}$

c) $\frac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+10.5s+9}$

d) $\frac{s^2-16}{s^3+8s^2+24s+32}$

e) $\frac{s+1}{s^3+6s^2+11s+6}$

BAB 4

REPRESENTASI MATEMATIKA DARI MODEL FISIK SISTEM ELEKTRIK DAN ELEKTRONIK

Setelah mempelajari bab ini maka:

- ✓ Dapat membuat persamaan diferensial dari sistem elektrikal dan elektronika
- ✓ Dapat mentransformasikan persamaan diferensial ke persamaan Laplace dari suatu rangkaian
- ✓ Dapat menentukan sistem masukan dan keluaran dari suatu rangkaian
- ✓ Dapat menentukan fungsi alih dari suatu rangkaian
- ✓ Dapat mengaplikasikan *software* MATLAB pada rangkaian elektrikal dan elektronika
- ✓ Dapat menampilkan grafik dari sistem elektrikal dan elektronika
- ✓ Dapat membandingkan hasil keluaran dan menganalisa kinerja dari sistem elektrikal dan elektronika

4.1. Umum

Untuk memahami perilaku sistem kendali yang kompleks dan rumit, langkah pertama adalah mendapatkan model matematisnya, yang bersifat kuantitatif dengan menggunakan persamaan diferensial. Hal ini dikarenakan oleh hubungan antara variabel sistem dan model matematis pada sistem kendali yang keadaannya dapat berbentuk dinamis atau berubah-ubah. Persamaan yang sering digunakan adalah persamaan diferensial, dan dibuat linier agar penyelesaian nya lebih mudah dengan menggunakan transformasi Laplace. Dalam praktiknya sistem yang begitu kompleks maka diperlukan asumsi mengenai cara kerja sistem tersebut. Oleh karena itu, diperlukan pertimbangan suatu sistem fisis dengan membuat asumsi (pengandaian) dan melinierkan sistem tersebut. Akhirnya dalam penyelesaian memanfaatkan beberapa metode matematis sehingga dapat diselesaikan sesuai dengan harapan.

Untuk menganalisis sebuah rangkaian dalam bentuk model fisis hal-hal yang perlu diperhatikan adalah sebagai berikut:

Linier vs Nonlinier

- Sistem linier: untuk sistem linier berlaku hukum superposisi, sedangkan untuk respons suatu sistem terhadap beberapa input, berbeda merupakan kombinasi respons masing-masing input.
- Sistem fisis umumnya bersifat nonlinier.
- Untuk daerah kerja yang kecil, sistem nonlinier dapat dianggap linear.

Time-Invariant vs Time-Varying

- Sistem *time-invariant* memiliki parameter-parameter yang konstan, tak tergantung waktu. Responsnya tak tergantung pada saat kapan input diberikan.
- Sistem *time-varying* memiliki satu atau lebih parameter yang berubah terhadap waktu. Responsnya tergantung pada waktu diberikan input.

Contoh: Sistem kendali pesawat ruang angkasa: bobotnya berkurang akibat konsumsi bahan bakar.

Continuous-Time vs Discrete-Time

- Sistem kontinu waktu: memiliki semua variabel/sinyal yang kontinu terhadap waktu.
- Sistem diskret waktu: memiliki satu atau lebih variabel/sinyal yang diskret terhadap waktu.

Deterministic vs Stochastic

- Sistem *deterministic*: memiliki respons terhadap suatu input yang dapat ditebak dan berulang/konsisten.
- Sistem stokastik: respons terhadap input yang sama tidak selalu menghasilkan *output* yang sama.

Lumped vs Distributed Parameter

- Pemodelan komponen yang sederhana bila dapat dianggap bahwa parameter-parameter komponen tersebut dapat dimodelkan secara terkumpul di satu titik. Dicirikan dengan persamaan diferensial biasa.
- Pemodelan parameter terdistribusi lebih tepat digunakan. Dicirikan dengan persamaan diferensial parsial. Misalnya pada sistem transmisi.

Transfer Function vs State Space

- Fungsi alih digunakan untuk analisis sistem sederhana, SISO yang linear, kontinu*,* *time-invariant*, *lumped-parameters* dan *deterministic*.
- Untuk sistem modern yang kompleks dan berakurasi tinggi (ditandai dengan MIMO, non-linear, *time-varying*, optimal, *robust*) harus digunakan pendekatan *state space* yang bersifat domain waktu.

4.2. Fungsi Alih

Dalam teori kontrol, fungsi alih digunakan untuk mencirikan hubungan masukan dan keluaran dari komponen atau sistem yang dapat digambarkan dengan persamaan diferensial linear, invarian-waktu. Fungsi alih persamaan diferensial linear, invarian-waktu suatu sistem didefinisikan sebagai perbandingan antara transformasi Laplace keluaran (fungsi tanggapan) terhadap transformasi Laplace masukan (fungsi penentu dengan anggapan bahwa semua syarat awal nol.

Perhatikan persamaan diferensial linear, invarian-waktu sistem yang didefinisikan dengan persamaan diferensial berikut:

$a_0^{(n)}y + a_1^{(n-1)}y + \cdots + a_{n-1}y + a_n y$
$b_0^{(m)}y + b_1^{(m-1)}y + \cdots + b_{n-1}y + b_n y$ dengan $(n \geq m)$ ....(4-1)

dengan y adalah keluaran sistem dan x masukan. Fungsi alih sistem mi diperoleh dengan mengambil transformasi Laplace kedua sisi Persamaan dengan anggapan semua syarat awal nol atau

Fungsi alih

$$G(s) = \left|\frac{\mathcal{L}(keluaran)}{\mathcal{L}(masukan)}\right| \quad keadaan\ awal{=}nol$$

$$G(s) = \frac{a_0^{(n)}y+a_1^{(n-1)}y+\cdots+a_{n-1}y+a_n y}{b_0^{(m)}y+b_1^{(m-1)}y+\cdots+b_{n-1}y+b_n y} \text{ ....(4-2)}$$

Dengan menggunakan konsep fungsi alih dapat dinyatakan sistem dinamik dengan persamaan aljabar dalam *s*. Jika pangkat tertinggi dan *s* dalam penyebut fungsi alih sama dengan *n,* maka sistem disebut sistem *orde ke-n*.

Kegunaan konsep fungsi alih terbatas pada sistem linear persamaan diferensial, waktu tidak berubah. Namun pendekatan fungsi alih digunakan secara ekstensif dalam analisis dan desain sistem demikian. Berikut ini kita akan mendaftar komentar penting mengenai fungsi alih. (Perhatikan bahwa dalam daftar tersebut sebuah sistem adalah sistem linear yang dijelaskan oleh persamaan diferensial, waktu tidak berubah).

1. Fungsi alih dari sistem adalah model matematika yang merupakan metode operasional dari pernyataan persamaan diferensial yang menghubungkan variabel keluaran dengan variabel masukan.
2. Fungsi alih adalah sifat dari sistem tersebut sendiri, tidak tergantung dari besaran dan sifat dari masukan atau fungsi penggerak.
3. Fungsi alih termasuk unit yang diperlukan untuk menghubungkan masukan dengan keluaran; namun, ia tidak memberikan informasi

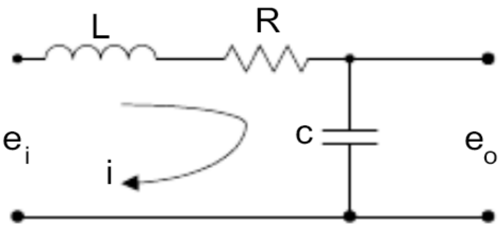
apapun mengenai struktur fisik dari sistem tersebut. (Fungsi alih dari banyak sistem yang secara fisik berbeda dapat identik).

4. Jika fungsi alih dari sistem diketahui, keluaran atau tanggapan dapat ditelaah untuk berbagai macam bentuk masukan dengan pandangan terhadap pengertian akan sifat dari sistem tersebut.
5. Jika fungsi alih dari sistem tidak diketahui, ia mungkin dapat diadakan secara percobaan dengan menggunakan masukan yang diketahui dan menelaah keluaran dari sistem tersebut. Sekali diadakan, fungsi alih memberikan penjelasan penuh dan karakteristik dinamika dari sistem, yang berbeda dan penjelasan fisiknya.

4.3. Pemodelan Matematika dari Sistem Elektrik

Pada teknik rekayasa industri peranan peranti elektronika memegang peranan yang sanat penting sehingga semua perilaku dari rangkaian dapat dianalisis dengan menggunakan metode seperti pada bab-bab sebelumnya Untuk mendapatkan fenomena yang terjadi pada sebuah sistem elektris maka langkah pertama adalah menyelesaikan dengan persamaan diferensial dengan menerapkan kaidah-kaidah/hukum-hukum seperti hukum Ohm, tegangan Kirchoff, arus Kirchoff, pada sebuah rangkaian yang telah disederhanakan sehingga lebih mudah untuk dilakukan analisis tanpa mengurangi arti dari rangkaian itu sendiri:

4.3.1. Rangkaian Listrik RLC Seri



Gambar 4.1 Model Rangkaian RLC Listrik

Untuk mendapatkan persamaan diferensial dari rangkaian listrik berikut adalah dengan menerapkan hukum persamaan dinamis sistem dan tegangan Kirchoff: Tegangan input sama dengan jumlah seluruh tegangan yang bekerja pada rangkaian listrik tersebut. Secara matematis dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$e_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad \text{.....(4-3)}$$

$$e_o(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad \text{..... (4-4)}$$

Selanjutnya dilakukan transformasi Laplace dengan mengasumsikan kondisi awal sama dengan nol sehingga didapat persamaan sebagai berikut:

$$E_i(s) = sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) \quad \text{.....(4-5)}$$

$$E_o(s) = \frac{1}{sC}I(s) = sE_o(s) = \frac{I(s)}{C} \quad \text{.....(4-6)}$$

Dengan substitusi persamaan (4-5) dikalikan dengan *s* maka didapat persamaan sebagai berikut:

$$sE_i(s) = s^2 LI(s) + sRI(s) + \frac{1}{C} I(s) \quad \text{.......................(4-7)}$$

$$sE_i(s) = (s^2 L + sR + \frac{1}{C}) I(s)$$

Perbandingan antara **tegangan keluaran** dengan **tegangan masukan** disebut dengan fungsi alih atau "*Transfer Functions*" maka perbandingan antara persamaan (4-6) dengan persamaan (4-7) sebagai berikut:

$$\frac{sE_o(s)}{sE_i(s)} = \frac{\frac{I(s)}{C}}{s^2 LI(s) + sRI(s) + \frac{1}{C} I(s)} = \frac{I(s)}{s^2 CLI(s) + sCRI(s) + I(s)} \quad \text{.................(4-8)}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = G(s) = \frac{I(s)}{\left[s^2 CL + sCR + 1 \right] I(s)} = \frac{1}{CLs^2 + CRs + 1}$$

Contoh 1

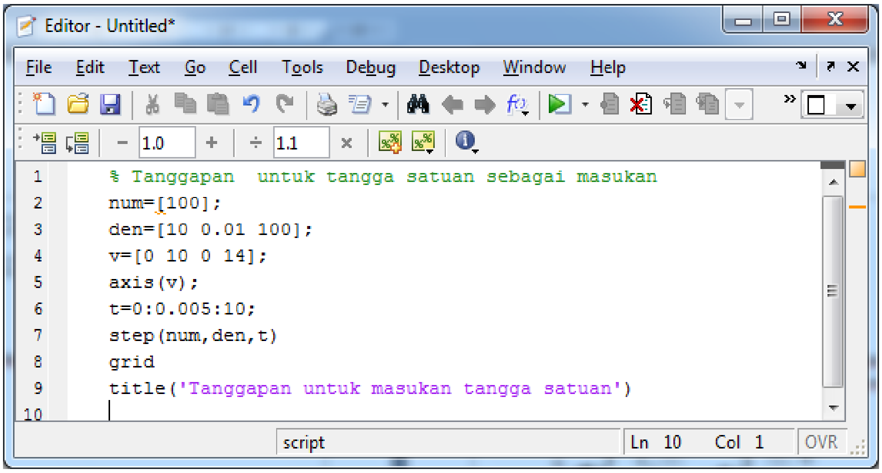
Bila diketahui nilai resistor adalah 100 Ohm, Induktor bernilai 1 mHenry dan kapasitor bernilai 1000µF, Tentukan persamaan karakteristik dari sistem elektrik tersebut:

$$G(s) = \frac{1}{CLs^2 + CRs + 1} = \frac{1}{100x0.001s^2 + 1000x10^{-6} x100s + 1}$$

$$= \frac{1}{0.1s^2 + 0.0001s + 1} x100 = \frac{100}{10s^2 + 0.01s + 100}$$

$$G(s) = \frac{100}{10s^2 + 0.01s + 100}$$

Kode MATLAB



Gambar 4.2 *Script* dari Rangkaian RLC Model 1

Penjelasan

Baris pertama menunjukkan komentar dari program dari MATLAB yang tidak di eksekusi oleh *software* dan bukan sebagai perintah.%

Baris kedua dan ketiga num dan denum dimaksud adalah numerator(pembilang) dan denumerator (penyebut) dari persamaan polynomial mengisi dengan nilai 100, dan 10, 0.01 dan 100 pada penyebut (ingat selalu di dalam tanda kurung siku), tanda ";" (titik koma artinya tidak menampilkan pada baris pada layar.

Baris kelima axis(v) menjelaskan membuat sumbu dengan batasan sumbu x 0 sampai dengan 10 dan sumbu y dari 0 sampai 14 dengan perintah ' v=[0,10:0,14];

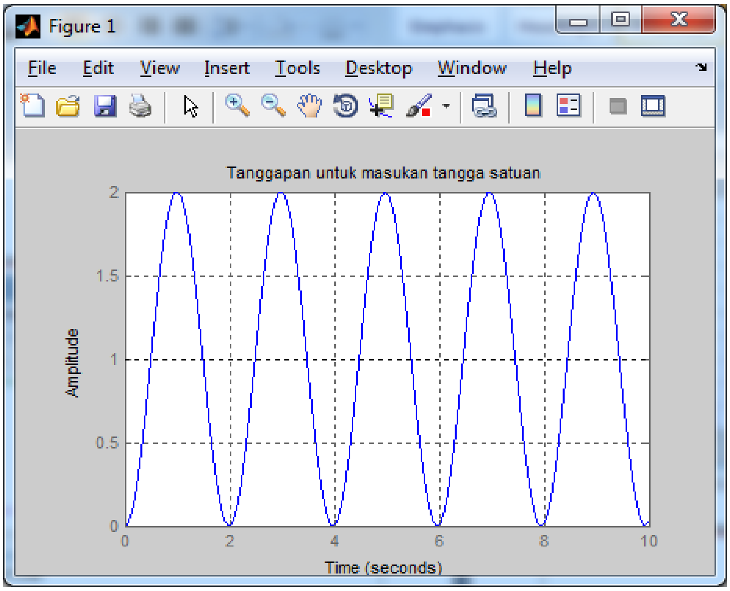
Baris keenam mengisyaratkan waktu yang dibutuhkan adalah dari 0 sampai dengan 10 sekon dengan *increment* (penambahan) bernilai 0.005.

Baris ketujuh menjelaskan kepada *software* untuk mengeksekusi program dengan masukan fungsi tangga (*step*) dengan mengisi grid on

Title (‘tanggapan untuk masukan tangga satuan’) mengindikasikan judul dari program yang kita buat dan di tampilkan pada layar.

TIP, ***investasi pengetahuan hari ini untuk masa depan cerah***

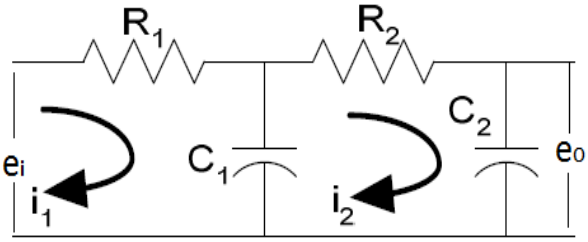
Hasil eksekusi program



Gambar 4.3 Tanggapan RLC dengan Masukan Fungsi Tangga Satuan

4.3.2. Model Matematika Rangkaian Listrik RC Paralel

Untuk melengkapi penjelasan sebelumnya dapat di jelaskan dengan contoh berikut: dapatkanlah sebuah fungsi alih dari sistem elektrik RLC yang terhubung paralel berikut:



Gambar 4.4 Model Rangkaian RC Listrik

pada *loop* pertama (i_1)

$$e_i(t) = R_1 i_1(t) + \frac{1}{C}\int (i_1(t) - i_2(t))dt \text{ ....(4-9)}$$

pada *loop* kedua (2) (i_2)

$$\frac{1}{C_1}\int (i_2(t) - i_1(t))dt + R_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2}\int (i_2(t)dt = 0 \text{ .... (4-10)}$$

Tegangan keluaran adalah sama dengan E_0 atau sama dengan tegangan pada kapasitor C_2

$$\frac{1}{C_2}\int (i_2(t)dt = e_0(t) \text{ ....(4-11)}$$

Bentuk Transformasi Laplace-nya (dengan asumsi semua kondisi awal sama dengan nol) adalah sebagai berikut:

$$Ei(s) = R_1 I_1(s) - \frac{1}{sC_1} I_2(s) - I_1(s) = \frac{1}{C_1 s}[I_1(s) - I_2(s)] - R = E_i(s) \text{ .... (4-12)}$$

$$\frac{1}{C_1 s}[I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0 \text{ ....(4-13)}$$

$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s) \text{ ....(4-14)}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(R_1C_1s)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1} \qquad \text{..........................(4-15)}$$

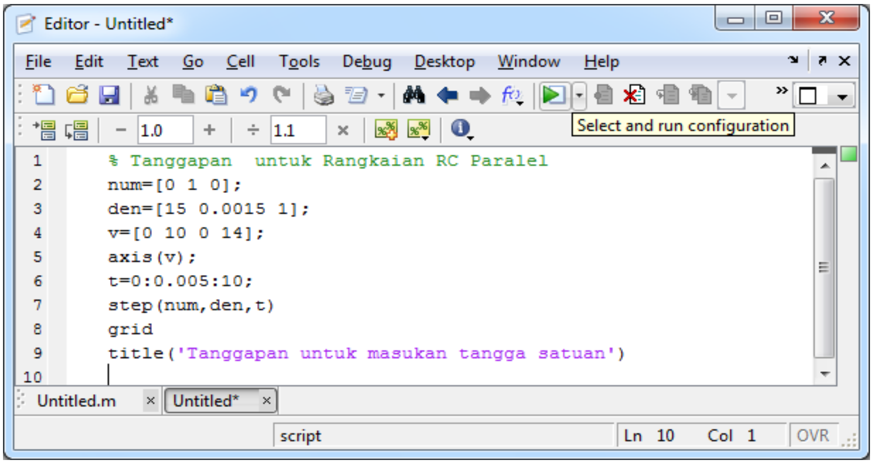
Contoh 2

Untuk menguji rangkaian secara numerik maka dapat sebagai berikut diketahui R1=10Ohm, R2=1kOhm, C1=10 Mikro Farad dan C2=150 Mikro Farad;

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{100x1000x10^{-6}x150x10^{-6}s^2+(100x10^{-6}+1000x150x10^{-6}+100x150x10^{-6})s+1}$$

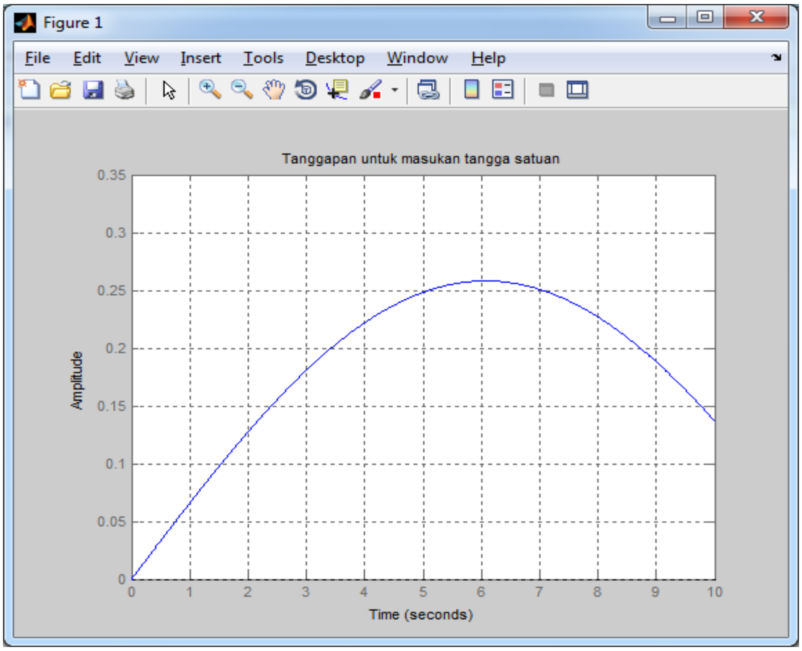
$$G(s) = \frac{1}{15s^2+0.015s+1}$$

Kode MATLAB



Gambar 4.5 *Script* RC dengan Masukan Fungsi Tangga Satuan

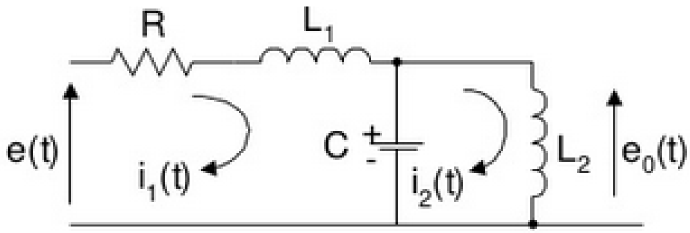
Gambar hasil *running* dari *script* MATLAB



Gambar 4.6 Tampilan RC dengan Masukan Fungsi Tangga Satuan

4.3.3. Model Matematika Rangkaian Listrik RLC Seri–Paralel

Perlu diuraikan bahwa, rangkaian listrik secara umum hanya terdiri dari komponen R L dan C yang dirangkaikan sedemikian rupa sehingga menjadi kesatuan rangkaian elektronika maupun rangkaian listrik, untuk menjelaskan rangkaian yang kompleks maka perlu penyederhanaan bai dirangkaikan secara seri, paralel atau kombinasi dari rangkaian tersebut. Perhatikan jangan terkecoh dengan rangkaian yang kompleks itu hanya sesungguhnya adalah rangkaian sederhana seperti yang akan di uraikan berikut ini.



Gambar 4.7 Model Rangkaian RC Listrik

$$e_i(t) = Ri_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + e_o(t) \quad \text{.......(4-16)}$$

$$e_o(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad \text{.......(4-17)}$$

$$i_c = i_1(t) - i_2(t)$$

$$i_c = C \frac{de_o(t)}{dt}, \quad \text{.......(4-18)}$$

$$i_c = i_1(t) - i_2(t) = C \frac{de_o(t)}{dt}$$

Langkah berikutnya menentukan transformasi Laplace dari persamaan (4-16) sampai persamaan (4-18)
sebagai berikut:

$$E_i(s) = RI_1(s) + L_1 sI_1(s) + E_o(s)$$

$$E_i(s) = [R + L_1 s]I_1(s) + E_o(s) \quad \text{.......(4-19)}$$

$$I_{1(}t) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R + L_1 s} \quad \text{.......(4-20)}$$

$$E_o(s) = sL_2 I_2(s) \quad \text{.......(4-21)}$$

$$I_2(s) = \frac{E_o(s)}{sL_2}$$

$$I_1(s) - I_2(s) = sCE_o(s) \text{ ....(4-22)}$$

Dengan menyubstitusi persamaan Laplace (4-17), (4-20) tersebut maka:

$$\frac{E_i(s) - E_o(s)}{R + L_1 s} - \frac{E_o(s)}{sL_2} = sCE_o(s) \text{ ....(4-23)}$$

$$\frac{sL_2 E_i(s) - sL_2 E_o(s) - (R + L_1 s)sE_o(s)}{(R + L_1 s)sL_2} = sCE_o(s)$$

$$sL_2 E_i(s) - (Rs(L_1 L_2))E_o(s) = (R_1 + sL_1)(s^2 L_2 C)E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{sL_2}{s^2 L_2 C(R_1 s L_1)(L_1 L_2)R} = \frac{sL2}{s^3 L_1 L_2 C + s^2 L_2 CR + s(L_1 + L_2) + R} \text{ ....(4-24)}$$

Contoh 3

Bila R=10 Ohm,L1=L2=10 H,C=100 F, dapatkan respons dari sistem tersebut, maka didapat

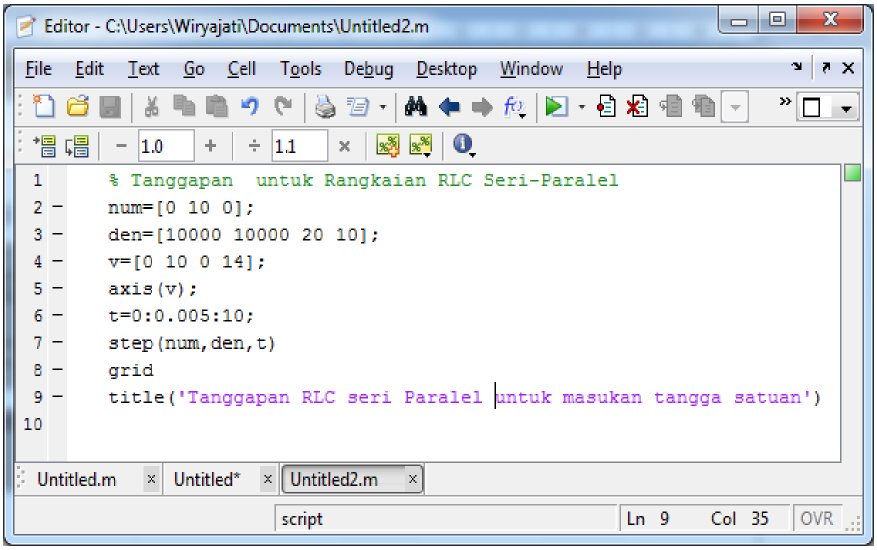
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = G(s) = \frac{sL2}{s^3 L_1 L_2 C + s^2 L_2 CR + s(L_1 + L_2) + R}$$

$$= \frac{s10}{s^3 10x10x100 + s^2 10x100x10 + s(10+10) + 10}$$

$$= \frac{10s}{s^3 10000 + s^2 10000 + s20 + 10}$$

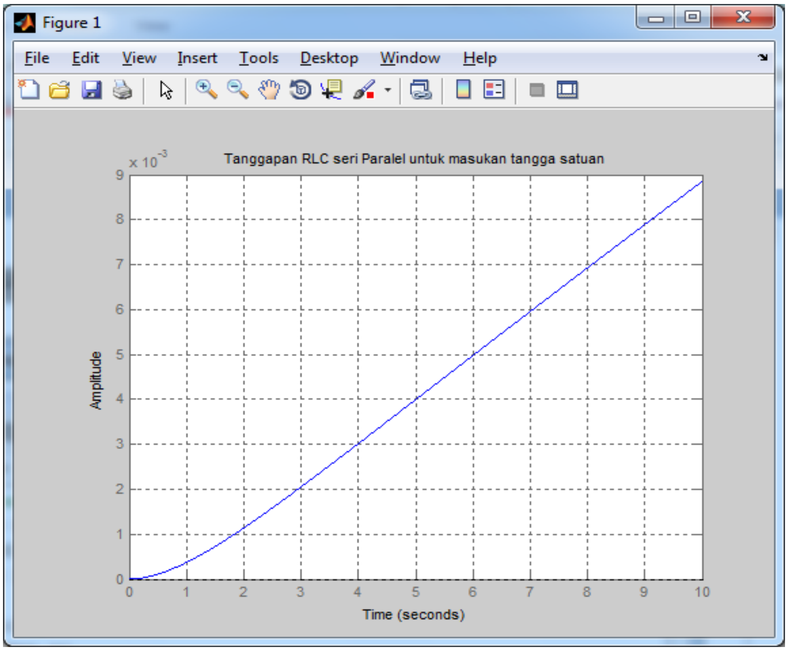
- ✓ Jangan pernah ragu untuk mencoba menyederhanakan rangkaian
- ✓ Semua rangkaian kompleks terdiri dari rangkaian yang sederhana
- ✓ Rangkaian seri untuk resistor adalah penjumlahan seluruh resistor
- ✓ Rangkaian paralel untuk resistor adalah 1/Rtot =!/R1+1/R2+...+1/Rn)

Kode MATLAB



Gambar 4.8 *Script* MATLAB Pengujian Rangkaian RLC Seri, Paralel

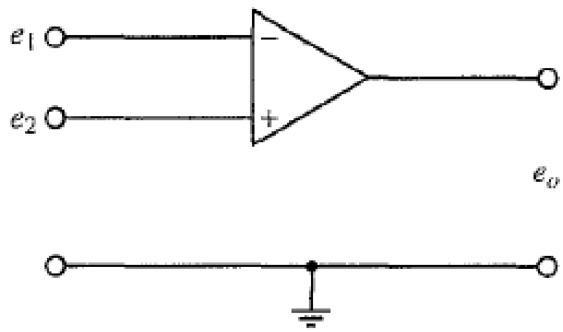
Kode MATLAB



Gambar 4.9 Grafik Hasil Pengujian Rangkaian RLC Seri, Paralel

4.3.4. Model Matematika dari *Operational-Amplifier* Ideal

Operational Amplifier sering disebut juga dengan istilah *op-amp*, peralatan ini sering dipergunakan untuk penguatan sinyal sensor dari sebuah sistem, sering juga dipergunakan sebagai peraltan kontroler ataupun filter. Perhatikan gambar 4-9 menunjukkan bahwa *op-amp* ideal terdiri dari dua buah tegangan input, yang bertanda positif dan negatif, secara praktis tegangan input yang bertanda negatif di ukur terhadap nol atau *grounding* demikian juga untuk tegangan input yang bertanda positif.



Gambar 4.10 Rangkaian *Operational Amplifier*

Pada sisi input e_1 berhubungan dengan negatif dari *op-amp* disebut dengan *inverting system* sedangkan e_2 disebut dengan *non inverting system*. Hubungan antara tegangan e_1 dan e_2 adalah $e_2 - e_1$ sehingga bila dilihat dari sisi *output* menjadi:

$e_o = K(e_2 - e_1) = -K(e_1 - e_2)$ ....(4-24)

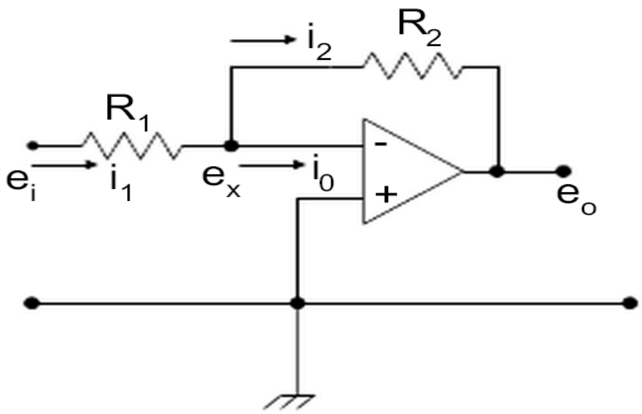
Di mana tegangan input $e_1$dan e_2 dapat berupa sinyal DC atau AC, sedangkan K adalah penguatan diferensial atau penguatan tegangan. Besaran dari K biasanya sekitar $10^5 \sim 10^6$ sedangkan untuk frekuensi kerja tidak kurang dari 10 Hz. Pada umumnya *amplifier* dapat disebut sebagai diferensial *amplifier* karena penguatan dari *op-amp* dapat sangat tinggi tergantung dari teknik penguatannya.

Pada *op-amp* ideal tidak ada arus yang masuk menuju terminal input, dan tegangan *output* adalah tidak dapat berhubungan langsung kepada terminal *output*, atau dengan perkataan lain impedansi input sangat tinggi sampai tek berhingga dan impedansi *output*-nya adalah nol. Pada kenyataannya *op-amp* adanya arus yang sangat kecil dan cenderung dapat diabaikan, sehingga hanya terjadi aliran arus dari sisi input menuju *output*. Sehingga dalam setiap analisis diasumsikan *op-amp* adalah ideal.

4.3.4.1. Inverting Amplifier

Op-amp inverting artinya keluaran akan diperkuat sesuai dengan penguatan dengan membalik sinyal input sebesar 180^0, untuk menganalisis rangkai *inverting* perhatikan gambar 4-10 dengan asumsi *op-amp* adalah ideal. Untuk memudahkan mendapatkan persamaan dari *op-amp* mari kita lihat contoh analisis rangkaian *op-amp* berikut:

- ✓ *Operational amplifier* adalah peranti yang kegunaannya sangat luas dan multifungsi
- ✓ Berupa *inverting*, *non inverting*, *comparator*, *clipper*
- ✓ Dalam menganalisis *op-amp* asumsikan semua adalah ideal
- ✓ Syarat ideal *op-amp*, impedansi masukan pada *op-amp* takberhingga
- ✓ Arus yang mengalir tidak ada yang masuk *op-amp*



Gambar 4.11 Penguat *Inverting Op-Amp* Ideal

Asumsi kan bahwa Op Amplifier Ideal

$Z_{in} = \infty$

Sehingga $I_o = 0$ ....(4-25)

$e_x \cong 0$ Virtual ground

sehingga $i_1 = i_2$

Persamaan rangkaian menjadi

$$\frac{e_i - e_x}{R_1} = \frac{e_x - e_o}{R_2}$$

....(4-26)

$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$$

$$e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i$$

Transformasi Laplace dari sistem tersebut adalah sebagai berikut:

$$E_o(s) = -\frac{R_2}{R_1} E_i(s)$$

.... (4-27)

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Persamaan ini disebut dengan fungsi alih dari *op-amp*, dan sering disebut dengan rangkaian penguat dengan penguatan yang hanya dipengaruhi oleh besarnya perbandingan nilai R input dan R umpan balik

Contoh 4

Perhatikan gambar 4-10 bila diketahui op dengan adalah ideal dengan R1=10 K R2=250 K dapatkan grafik kinerja dari opm tersebut!

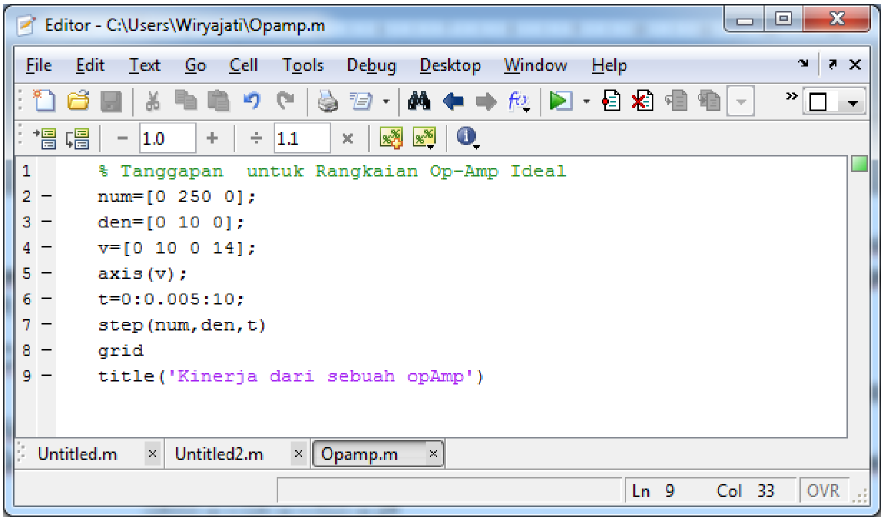
Solusi

Gunakan persamaan (4-25) dan masukan nilai tersebut maka diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{250}{10} = 25$$

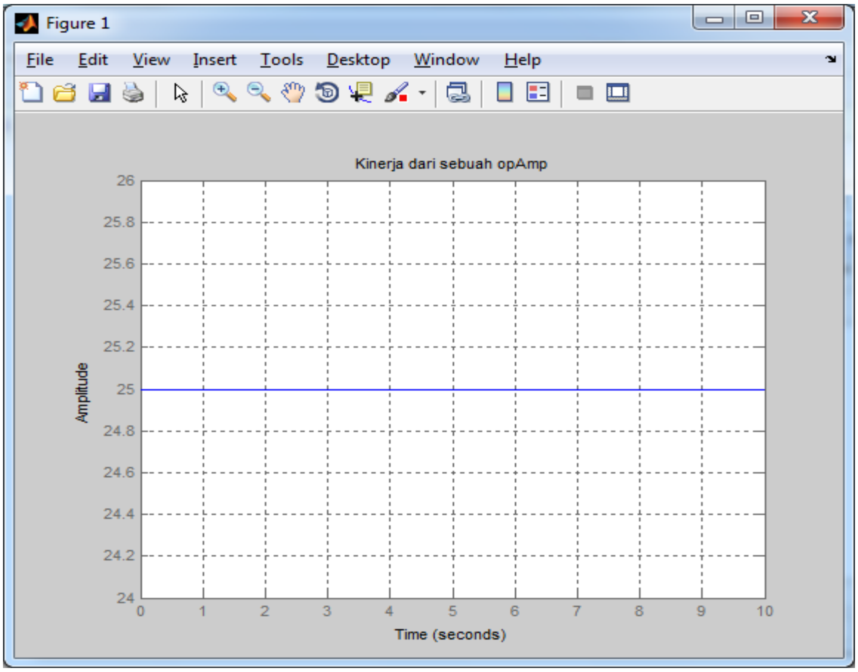
✓ Penguatan pada rangkaian *op-amp* hanya bergantung pada perbandingan resistansi *feedback* dan resistansi input.

Kode MATLAB



Gambar 4.12 *Script* Penguat *Op-Amp* Ideal

Hasil eksekusi MATLAB

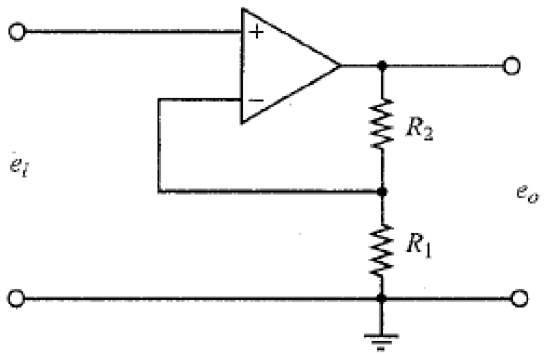


Gambar 4.13 Plot Penguat *Op-Amp* Ideal

Penjelasan

Amplitude input dari sebuah *amplifier* tidak berpengaruh pada *op-amp* itu sendiri, namun keluaran dari *op-amp* tergantung dari perbandingan antara nilai resistansi *feedback* dan resistansi input, penguatan dari *op-amp* tersebut adalah sebesar 25 kali dari input.

4.3.4.2. Non-Inverting Amplifier



Gambar 4.14 Penguat *Non-Inverting Op-Amp* Ideal

Gambar 4-11 menunjukkan sebuah *amplifier non inverting*, dengan rangkaian sama dengan pada gambar 4-10. Untuk menganalisis rangkaian listrik dari sebuah *non–inverting amplifier*.
Dari gambar 4-11 dapat dianalisis rangkaian listrik sebagai:

$$e_o(t) = K(e_i(t) - \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_o(t) \quad \text{...(4-28)}$$

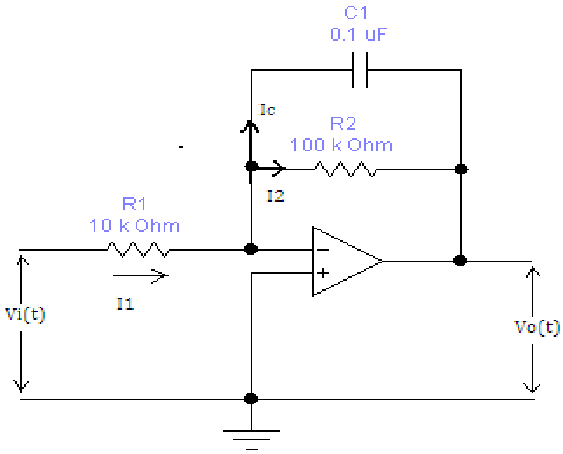
Dengan K adalah penguatan diferensial dari *amplifier*, dar persamaan (4-28) dapat dibentuk menjadi:

$$e_i(t) = (\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{K})E_o(t) \quad \text{...(4-29)}$$

Dengan K>> 1, jika $R_1/(R_1+R_2)$>>1/K, sehingga persamaan (4-29) menjadi

$$e_o(t) = (1 + \frac{R_2}{R_1})E_i(t) \quad \text{..(4-30)}$$

4.3.4.3. Model Matematika Operasional *Inverting Amplifier*



Gambar 4.15 Penguat *Op-Amp* Ideal dengan C

Asumsi *op-amp* ideal, maka:

$$I_1(t) = I_2(t) + I_c(t) \quad \text{.....(4-31)}$$

$$I_1(t) = \frac{v_1(t) - e_0(t)}{R_1} \cong \frac{v_1(t)}{R_1} \quad \text{.....(4-32)}$$

$$I_2(t) = \frac{e_0(t) - v_0(t)}{R_2} \cong -\frac{v_0(t)}{R_2} \quad \text{.....(4-33)}$$

$$I_C(t) = C\left(\frac{d\big(e_0(t) - v_0(t)\big)}{dt}\right) \cong C - \frac{d(v_0(t))}{dt} \quad \text{.....(4-34)}$$

Substitusi persamaan (4-27),dan (4-28) dan (4-29) ke-persamaan (4-26), maka:

$$I_1\,(t) = I_2\,(t) + I_C\,(t)$$

$$\frac{v_i(t)}{R_1} = -\frac{v_0(t)}{R_2} + C\frac{-d(v_0(t))}{dt}$$

$$\frac{v_i(s)}{R_1} = -\frac{v_0(s)}{R_2} - Cs\;v_0(s)$$

$$\frac{v_i(s)}{R_1} + \frac{v_0(s)}{R_2} + Cs\, v_0(s) = 0$$

$$\frac{v_i(s)}{R_1} + v_0(s)\left(Cs + \frac{1}{R_2}\right) = 0$$

$$\frac{v_i(s)}{R_1} = -\left(Cs + \frac{1}{R_2}\right) v_0(s) \quad \text{...(4-35)}$$

Transfer function:

$$\frac{output}{input} = \frac{v_0(t)}{v_1(t)} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{1}{R_2Cs+1}\frac{-R_2}{R_1\{-(CSR_2+1)\}} \quad \text{....................................(4-36)}$$

Contoh 5

Perhatikan gambar 4-13 bila diketahui *op-amp* adalah ideal dapatkan grafik kinerja dari *op-amp* tersebut!

Solusi

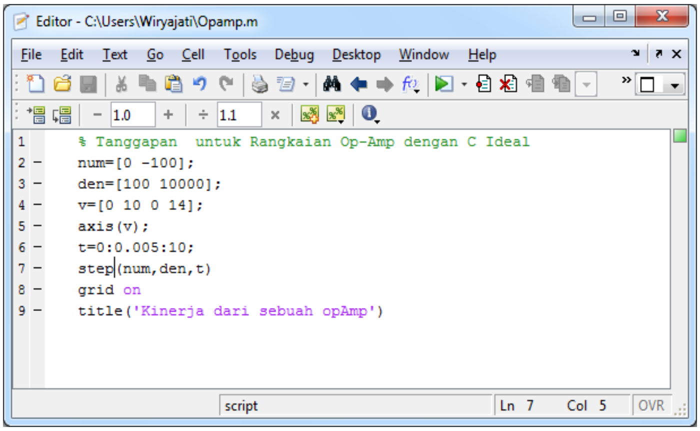
Gunakan persamaan (4-36) dan masukan nilai tersebut maka diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{v_0(t)}{v_1(t)} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{1}{R_2Cs+1}\frac{-R_2}{R_1\{-(CSR_2+1)\}}$$

$$\frac{V_0(t)}{V_i(t)} = -\left(\frac{100x10^3\ \Omega}{10x10^3\ \Omega}\right)\frac{1}{(100x10^3\ \Omega)(0.1x10^{-6})s+1}$$

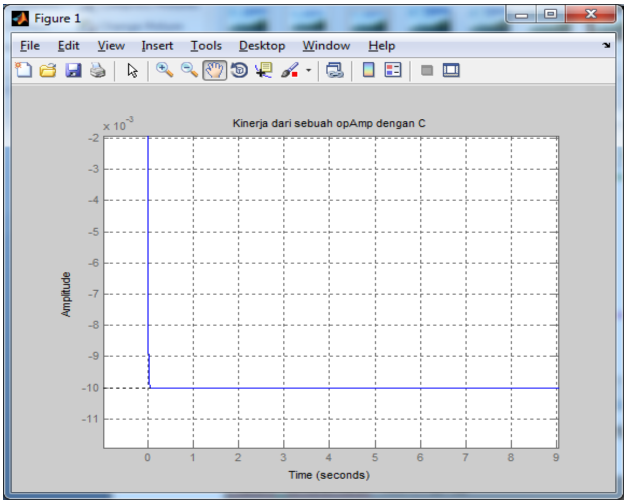
$$\frac{V_0(t)}{V_i(t)} = \frac{-100}{100s+10^4}$$

Kode MATLAB



Gambar 4.16 *Script* Penguat *Op-Amp* Ideal dengan *Capasitor*

Hasil eksekusi MATLAB



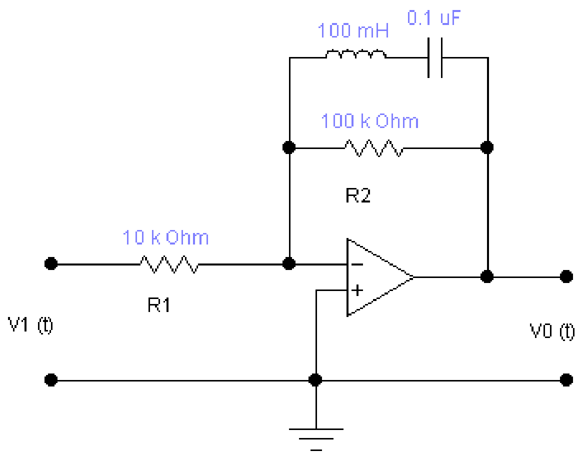
Gambar 4.17 *Display* Penguat *Op-Amp* Ideal dengan C

Contoh 6

Perhatikan gambar 4-16 bila diketahui op dengan adalah ideal dapatkan grafik kinerja dari op *amplifier* tersebut!

Solusi

Gunakan persamaan (4-34) dan masukan nilai tersebut maka diperoleh sebagai berikut:



Gambar 4.18 *Display* Penguat *Op-Amp* Ideal dengan *Capasitor* Seri

Asumsi *op-amp* ideal, maka:

$I_1(t) = I_2(t) + I_3(t)$

$I_1(t) = \frac{v_1(t)-e_0(t)}{R_1} \cong \frac{v_1(t)}{R_1}$

$I_2(t) = \frac{e_0(t)-v_0(t)}{R_2} \cong -\frac{v_0(t)}{R_2}$

$I_3(t) = \frac{1}{L}\int d\big(e_0(t)-v_0(t)\big)dt + C\left(\frac{d\big(e_0(t)-v_0(t)\big)}{dt}\right)$

$\cong -\frac{1}{L}\int d\big(v_0(t)\big)dt + C\,\frac{-d(v_0(t))}{dt}$

Substitusi persamaan, maka:

$$I_1(t) = I_2(t) + I_3(t)$$

$$\frac{v_i(t)}{R_1} = -\frac{v_0(t)}{R_2} - \frac{1}{L}\int d\big(v_0(t)\big)dt - C\,\frac{d(v_0(t))}{dt} \quad \text{.....................................(4-37)}$$

Perbandingan antara keluaran dengan masukan sebagai berikut:

$$\frac{v_i(s)}{R_1} = -\frac{v_0(s)}{R_2} - \frac{v_0(s)}{Ls} - Cs\,v_0(s) \quad \text{...(4-38)}$$

$$\frac{v_i(s)}{R_1} + \frac{v_0(s)}{R_2} + \frac{v_0(s)}{Ls} + Cs\,v_0(s)$$

$$\frac{v_i(s)}{R_1} = -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Ls} + Cs\right) v_0(s)$$

$$\frac{v_i(s)}{v_0(s)} = -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Ls} + Cs\right) R_1$$

$$\frac{v_i(s)}{v_0(s)} = -\left(\frac{Ls+R_2+R_2LCs^2}{R_2Ls}\right) R_1$$

$$\frac{v_i(s)}{v_0(s)} = -\left(\frac{R_1Ls+R_1R_2+R_1R_2LCs^2}{R_2Ls}\right)$$

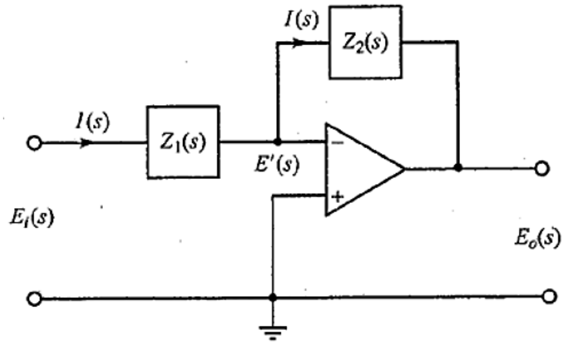
$$\frac{v_0(s)}{v_i(s)} = -\left(\frac{R_2Ls}{R_1Ls+R_1R_2+R_1R_2LCs^2}\right)$$

$$\frac{v_0(s)}{v_i(s)} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{Ls}{Ls+R_2+R_2LCs^2}\right) \quad \text{... (4-39)}$$

$$G(s) = \frac{v_0(t)}{v_1(t)} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{1}{R_2Cs+1}\,\frac{-R_2}{R_1\{-(CSR_2+1)\}} \quad \text{.....................................(4-40)}$$

4.3.4.4. Menyederhanakan Rangkaian Kompleks pada *Op-Amp*

Metode yang paling tepat digunakan untuk mendapatkan fungsi alih dari rangkaian kompleks adalah dengan cara menyederhanakan beberapa kelompok komponen menjadi sebuah rangkaian impedansi. Untuk memperjelas pemahaman mari kita lihat hal-hal berikut: Langkah pertama mengasumsikan nilai impedansi input yaitu impedansi pada rangkaian masukan dari *op-amp*, dan impedansi umpan balik (*feedback*) yang menghubungkan antara *output* dan input, langkah berikutnya adalah menentukan rangkaian pengganti kelompok Z_1 dan kelompok $Z_{2,}$ lebih jelas lihat gambar 4-18, perhatikan Z_1(s) dan Z_2(s), dengan cermat.



Gambar 4.19 Pendekatan dengan Impedansi

Persamaan yang didapat dari rangkaian pada gambar 4-18 adalah sebagai berikut:

$$\frac{E_i(s)-E'(s)}{Z_1}=\frac{E'(s)-E_o(s)}{Z_2} \quad \text{...(4-41)}$$

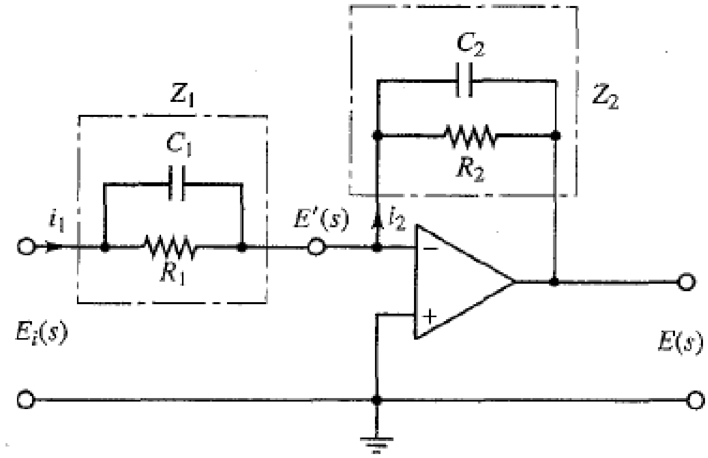
Pada *op-amp* ideal nilai E’ (s) adalah mendekati nol, sehingga kita dapat mengubah persamaan 4-41 menjadi berikut:

$$\frac{E_i(s)}{Z_1}=\frac{-E_o(s)}{Z_2}=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \quad \text{..(4-42)}$$

Agar lebih jelas pemahaman perhatikan contoh penyederhanaan rangkaian *op-amp* berikut:

Dari gambar 4-18 Pertama perhatikan impedansi input yaitu Z_1(s) yang komponennya terdiri dari R1 dan C1 yang dihubungkan secara paralel dan untuk rangkaian pengganti pada sisi *feedback* komponennya terdiri dari R_2 dan C_2 adalah sebagai berikut dapatkan impedansi adalah:

$$Z_1=\frac{R_1}{R_1C_1s+1} \qquad Z_2=\frac{R_2}{R_2C_2s+1} \quad \text{...(4-43)}$$

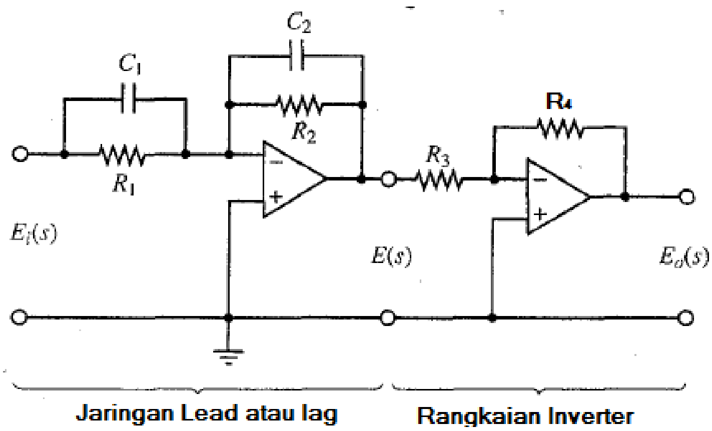


Gambar 4.20 Pendekatan dengan Impedansi

Dengan substitusi t persamaan (4-43) ke persamaan (4-42), maka kita dapatkan persamaan baru yaitu:

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = \frac{R_2 R_1 C_1 s + 1}{R_1 R_2 C_2 s + 1} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \quad \text{..........................(4-44)}$$

Tanda minus pada persamaan (4-44) menunjukkan bahwa penguatan tersebut adalah *inverting amplifier*. Perhatikan gambar 4-19, adalah sebuah rangkaian dengan dua penguatan *op-amp* yang sering disebut dengan rangkaian *lead lag kompensasi,* dapatkan rangkaian pengganti dan fungsi alih dari rangkaian tersebut.



Gambar 4.21 Rangkaian *Lead* dan *Lag Amplifier*

Perhatikan gambar 4-19. Fungsi alih dari *inverter* adalah seperti cara sebelumnya persamaan (4-42), lihat cara sebelumnya!

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3} \quad \text{.......} \quad (4\text{-}45)$$

Menyambungkan persamaan rangkaian *lead* persamaan (4-44) dan rangkaian *inverter* persamaan (4-45) sehingga menjadi:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2R_4}{R_1R_3}\,\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1} = \frac{R_4C_1}{R_3C_3}\,\frac{s+\dfrac{1}{R_1C_1}}{s+\dfrac{1}{R_2C_2}} \quad \text{.......} \quad (4\text{-}46)$$

$$K_c\alpha\,\frac{T_s+1}{\alpha T_s+1} = K_c\,\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\alpha\dfrac{1}{T}}$$

Dengan, $T = R_1C_2$, $\alpha T = R_2C_2$, $K_c = \dfrac{R_4C_1}{R_3C_2}$

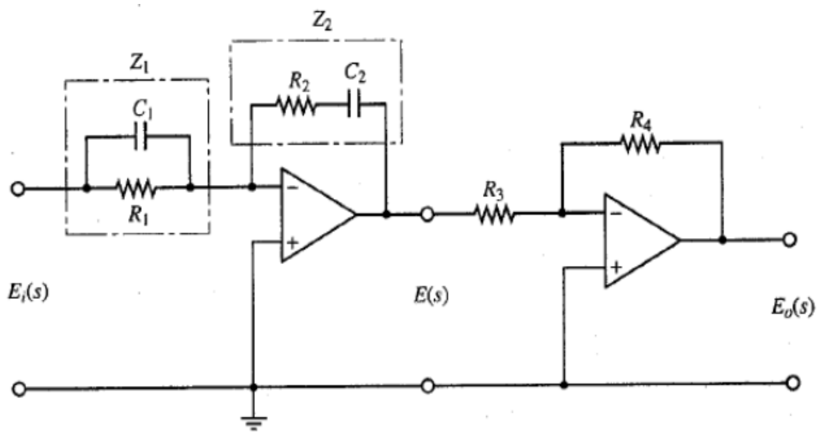
Sehingga,

$$K_c\alpha = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}\frac{R_2C_2}{R_1C_1} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3},\ \alpha = \frac{R_2C_2}{R_1C_1},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4-47)}$$

Perhatikan bila jaringan ***lead*** jika $R1C1 > R2C2$ atau $\alpha < 1$, sedangkan jika $R1C1 < R2C2$

4.3.4.5. Kontroler PID Menggunakan *Operational Amplifier*

Kontroler adalah sebuah peranti elektronik yang dapat digunakan sebagai peralatan pengendali sinyal, rangkaian ini dapat berupa komponen elektronika atau peralatan lain yang bertujuan sama. Dalam pembahasan ini kita akan membahas sebuah *controller* konvensional yang sangat andal yang berfungsi sebagai *controller*, perhatikan gambar di bawah.



Gambar 4.22 Rangkaian PID *Controller* dengan *Op-Amplifier*

Dari gambar 4-20 menunjukkan rangkaian *controller* berpenguat PID (Porporsional, Integrator dan Diferensial) menggunakan *operational amplifier*, fungsi alih dari rangkaian tersebut adalah sesuai persamaan (4-42) yang tertulis kembali sebagai berikut:

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

dengan $Z_1(s) = \dfrac{R_1}{R_1C_1s+1}$, $Z_2(s) = -\dfrac{R_2C_2s+1}{C_2s}$

sehingga

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{\dfrac{R_2C_2s+1}{C_2s}}{\dfrac{R_1}{R_1C_1s+1}} = \left(\frac{(R_2C_2s+1)}{C_2s}\right)\left((\frac{R_1C_1s+1}{R_1}\right) \quad \text{.................................(4-48)}$$

Untuk mendapatkan persamaan fungsi alih dari $\dfrac{E_o(s)}{E_i(s)}$ adalah sesuai persamaan (4-45) adalah:

$$\begin{aligned}\frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{E_o(s)}{E\ (s)}\frac{E\ (s)}{E_i(s)} = \frac{R_4R_2}{R_3R_1}\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_2C_2s} \\ &= \frac{R_4R_2}{R_3R_1}\left(\frac{R_1C_1+R_2C_2}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_2s} + R_1C_1s\right) \quad \text{.........(4-49)} \\ &= \frac{R_4(R_1C_1+R_2C_2)}{R_3R_1C_2}\left[1 + \frac{1}{(R_1C_1+R_2C_2)s} + \frac{R_1C_1R_2C_2)}{R_1C_1+R_2C_2}s\right]\end{aligned}$$

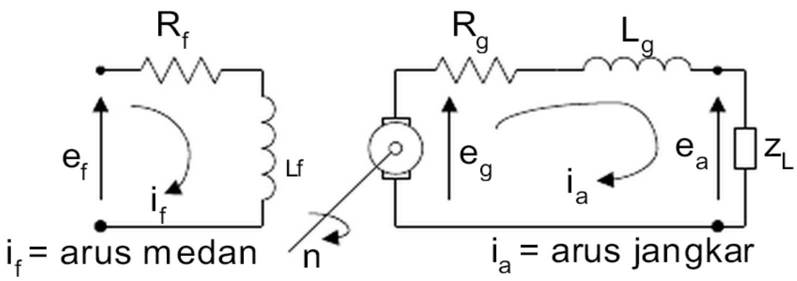
4.3.5. Model Matematika dari Motor

Motor listrik merupakan perangkat elektromagnetis yang mengubah energi listrik menjadi energi mekanik. Energi mekanik ini digunakan untuk, misalnya memutar *impeller* pompa, *fan* atau *blower*, menggerakan kompresor, mengangkat bahan, dll. Motor listrik digunakan juga di rumah (*mixer*, bor listrik, *fan* angin) dan di industri. Motor listrik kadangkala disebut "kuda kerja" nya industri sebab diperkirakan bahwa motor-motor menggunakan sekitar 70% beban listrik total di industri.

Motor DC memerlukan suplai tegangan yang searah pada kumparan medan untuk diubah menjadi energi mekanik. Kumparan medan pada motor DC disebut stator (bagian yang tidak berputar) dan kumparan jangkar disebut rotor (bagian yang berputar). Jika terjadi putaran pada kumparan jangkar dalam pada medan magnet, maka akan timbul tegangan (GGL) yang berubah-ubah arah pada setiap setengah putaran, sehingga merupakan tegangan bolak-balik. Prinsip kerja dari arus searah adalah membalik fasa tegangan dari gelombang yang mempunyai nilai positif dengan menggunakan komutator, dengan demikian arus yang berbalik arah dengan kumparan jangkar yang berputar dalam medan magnet. Bentuk motor paling sederhana memiliki kumparan satu lilitan yang bisa berputar bebas di antara kutub-kutub magnet permanen.

4.3.5.1. Model Matematika Generator DC

Untuk dapat menganalisis rangkaian dan mengetahui performansi dari sistem motor maka perlu dianalisis berdasarkan perbandingan antara keluaran dan masukan dari pemodelan tersebut. Sebagai contoh akan dijelaskan model motor berpenguat medan berikut:



Gambar 4.23 Motor Penguat Medan

Dari rangkaian listrik dari model motor DC berpenguat medan dapat diuraikan hal-hal berikut:
Kecepatan konstan n
Arus *output* I_2 dapat dikontrol dari besarnya arus i_f

$e_f = k_1.n.\emptyset$ ....(4-50)

$\emptyset = k_2.i_f$

Dengan menggunakan hukum tegangan Kirchoff maka rangkaian listrik dari model motor DC pada sisi kiri/input didapat:

$e_f = R_f.i_f + L_f\frac{di_f}{dt}$ ....(4-51)

$i_f = \frac{e_g}{k_g}$ ....(4-52)

Substitusikan persamaan (4-39) ke persamaan 4-40)

$e_f = R_f\frac{e_g}{k_g} + \frac{L_f}{k_g}\frac{de_g}{dt}$ ....(4-53)

Transformasikan ke dalam bentuk Laplace menjadi;

$E_f(s) = R_f(s).I_f(s) + sL_fI_f(s)$ ....(4-54)

$E_f(s) = R_f(s).\frac{Eg(s)}{Kg(s)} + \frac{1}{kg(s)}sL_f(s)$

$E_f(s) - \frac{1}{kg(s)}\left[R_f(s) + sL_f(s)\right]E_g(s)$ ....(4-59)

$\frac{Eg(s)}{Ef(s)} = \frac{k_g}{R_f+sL_f}$ ....(4-60)

Pada sisi kanan/*output* berlaku hukum tegangan Kirchoff sebagai berikut:

$-e_a = -e_g + ia_aR_g + L + L_g\frac{di_a}{dt}$ ....(4-61)

$e_a = i_a.Z_L$ atau $i_a = \frac{e_a}{Z_L}$...(4-62)

Substitusikan persamaan (4-45) dan persamaan (4-46)

$-e_a = -e_g + \frac{e_a}{Z_L}R_g + \frac{L_g}{Z_L}\frac{de_g}{dt}$

$e_g = \left[e_{at} + \frac{R_g}{Z_L} e_a + \frac{L_g}{Z_L} \frac{de_g}{dt}\right]$ .... (4-63)

Lakukan transformasi Laplace persamaan (4-47)

$E_{g(s)} = \left[1 + \frac{R_g}{Z_L(s)} + s\frac{L_g}{Z_L(s)}\right] E_a(s)$

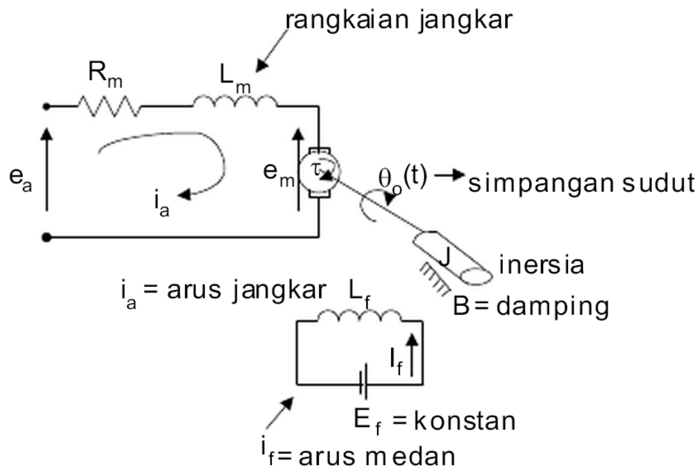
$\frac{E_a(s)}{E_g(s)} = \frac{Z_L(s)}{Z_L(s)+R_g+L_g(s)}$ .... (4-64)

Sehingga:

$\frac{E_a(s)}{E_f(s)} = \frac{E_g(s)}{E_f(s)} x \frac{E_a(s)}{E_g(s)}$

$\frac{E_a(s)}{E_f(s)} = \frac{R_g}{R+sL_f(s)} x \frac{Z_L(s)}{Z_L(s)+R+sL_g(s)}$ .... (4-65)

4.3.5.2. Model Matematika Motor DC Penguat Terpisah



Gambar 4.24 Motor Penguat Terpisah

e_m = tegangan induksi
$e_m = k_1 . \emptyset . n$ .... (4-66)
n = kecepatan rotasi (putaran) motor

i_f = konstan

$\emptyset = k_2 . i_f$ ....(4-67)

$\emptyset$ = konstan

Sehingga dengan substitusi persamaan (4-66) dengan persamaan (4-67) maka didapat sebagai berikut

$e_m = k_e . n = k_e . \frac{d\emptyset_o}{dt}$ ....(4-68)

k_e = konstanta tegangan motor

Persamaan Rangkaian Listrik dari Mesin:

$e_a = R_m i_a + L_m . \frac{di_a}{dt} + e_m$ ....(4-69)

Substitusi persamaan (4-68) ke persamaan (4-69)

$e_a = R_m i_a + L_m . \frac{di_a}{dt} + k_e . \frac{d\emptyset_o}{dt}$ ....(4-70)

Dengan mentransformasikan ke bentuk Laplace di dapat sebagai berikut:

$E_a(s) = (R_m + sL_m)I_a(s) + K_e s \emptyset_o(s)$ ....(4-71)

Persamaan Beban dari Mesin

Torsi yang dihasilkan motor adalah sebanding dengan fluksi yang dihasilkan motor dalam hal ini diasumsikan konstan dan sebanding dengan arus jangkar I_a dari definisi tersebut maka dapat ditulis persamaan:

$T = K_T I_a$ ....(4-72)

dengan K_T adalah konstanta motor

Transformasi Laplace persamaan (4-72) dan (4-74) didapat

$T = K_T I_a(s)$ ....(4-73)

$T = J \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt}$ ....(4-74)

$T = Js^2\theta_o(s) + Bs\theta_o(s)$ ....(4-75)

Dengan substitusi persamaan (4-73) ke (4-75)

$K_T I_a = Js^2\theta_o(s) + Bs\theta_o(s)$

$K_T I_a(s) = (Js^2 + Bs)\theta_o(s)$ ....(4-76)

Dengan membandingkan persamaan (4-76) dengan (4-71)

$K_T I_a(s) = (Js^2 + Bs)\theta_o(s)$

$\theta_o(s) = \frac{K_T I_a(s)}{(Js^2+Bs)\theta_o(s)}$

$E_a(s) = (R_m + sL_m)I_a(s) + K_e s\emptyset_o(s)$

$\frac{\emptyset_o(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K_T I_a(s)}{(Js^2+Bs)\theta_o(s)}}{(R_m+sL_m)I_a(s)+K_e s\emptyset_o(s)} = \frac{K_T}{JL_m s^2+(R_m J+L_m B)s+(RmB_+K_e K_T)s}$ .....(4-77)

Dengan asumsi:

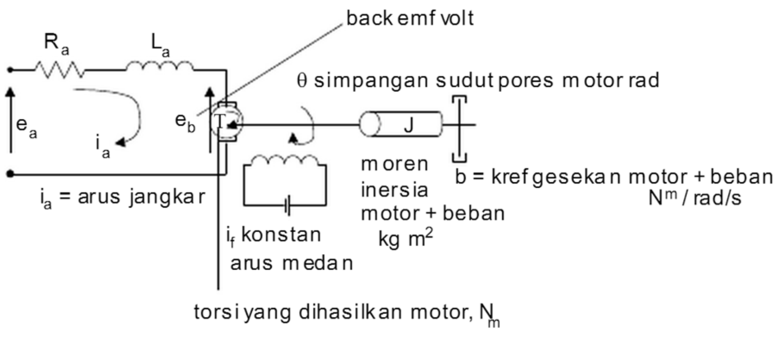
$T_a = \frac{L_m}{R_m}$ Konstanta waktu jangkar

$T_m = \frac{JR_m}{K_e K_T}$ Konstanta waktu motor

$\gamma = \frac{BR_m}{K_e K_T}$ Faktor redaman

$\frac{\emptyset_o(s)}{E_a(s)} = \frac{K_T}{[T_a T_m s^2+(T_m+\gamma T_a)s+(\gamma+1\quad)]}$ ....(4-78)

4.3.5.3. Model Matematika Motor DC Pengontrolan Arus Jangkar



Gambar 4.25 Motor DC Pengontrol Arus Jangkar

Dari gambar dapat diturunkan persamaan fluksi oleh arus medan adalah,

$\psi = K_f i_f$ ....(4-79)

konstan untuk i_f konstan

Persamaan Torsi, adalah persamaan (4-72) ditulis kembali sebagai berikut:

$T = K_T I_a \psi = K_f i_a . K_f i_f = K I_a$ ....(4-80)

dengan K adalah konstanta motor torsi

Tegangan back EMF: adalah proporsional terhadap fluksi (konstan) dan kecepatan sudut putaran poros motor sehingga persamaannya adalah:

$e_b = K_b \frac{d\emptyset}{dt}$ ....(4-81)

- ✓ ***Hukum Kirchoff 1*** "Arus total yang masuk pada suatu titik sambungan atau percabangan adalah nol"
- ✓ ***Hukum Kirchoff 2*** "Pada setiap rangkaian tertutup (*loop*), jumlah penurunan tegangan adalah nol"

Persamaan rangkaian listrik pada sisi input adalah:

$L_a \frac{di_a}{dt} + i_a R_a + e_b = e_a$ .... (4-82)

Persamaan keluaran dari motor

$T = K_T I_a(s)$ ....(4-83)

$T = J \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt}$ ....(4-84)

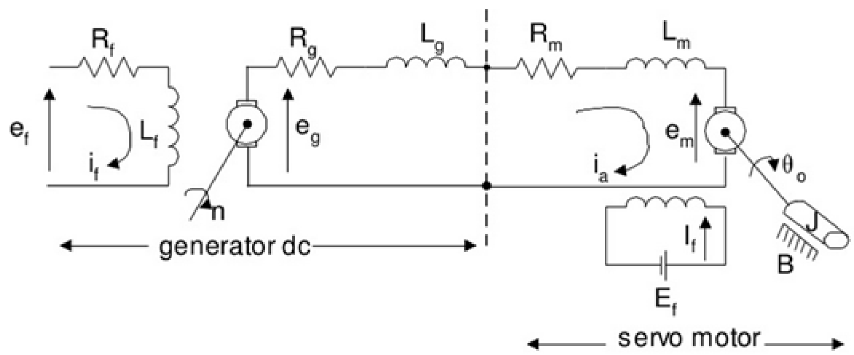
$T = Js^2\theta_o(s) + Bs\theta_o(s)$ ....(4-85)

Dengan menyelesaikan dan substitusi sama dengan persamaan (4-72) sampai dengan persamaan (4-78)

$$\frac{\emptyset_o(s)}{E_a(s)} = \frac{K_T}{[T_aT_ms^2+(T_m+\gamma T_a)s+(\gamma+1\quad)]} \quad \text{...(4-86)}$$

4.3.5.4. Model Matematis dari Generator Penguat Ward–Leonard

Sebuah generator DC men-*drive* motor servo sebagai penggerak utama dari servo DC. Untuk memodelkan rangkaian tersebut dapat dibagi dalam dua bagian yaitu bagian generator DC dan motor servo, selanjutnya lakukan pemodelan setiap bagian tersebut. Agar lebih jelas perhatikan metode tersebut di bawah ini.



Gambar 4.26 Motor DC Pengontrol Ward–Leonard

Fungsi alih

$$\frac{E_g(s)}{E_f(s)} = \frac{k_g}{R_f+sR_f} \quad \text{...(4-87)}$$

Persamaan *loop* sebelah kanan

$$e_g = (R_g + R_m)i_a + (L_s + L_m)\frac{d_{in}}{dt} + k_e.\frac{d\emptyset_o}{dt} \quad \text{..................................(4-88)}$$

Transformasi Laplace dari persamaan (4-88)

$$E_g(s) = [(R_g + R_m) + s(L_s + L_m)]i_a(s) + sk_e\emptyset_o(s) \quad \text{...................(4-89)}$$

Persamaan beban

$$T = J\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + B\frac{d\theta_0}{dt}$$

$$T = Js^2\theta_o(s) + Bs\theta_o(s)$$

Dari persamaan (4-84) substitusi ke persamaan (4-83) didapat sebagai berikut:

$$K_T I_a(s) = (Js^2 + Bs)\theta_o(s)$$

$$I_a(s) = \frac{(Js^2+Bs)\theta_o(s)}{K_T} \text{ ....(4-90)}$$

$$e_a \rightarrow e_g R_m. \rightarrow (R_g + R_m); L_m \ \rightarrow (L_m + L_g)$$

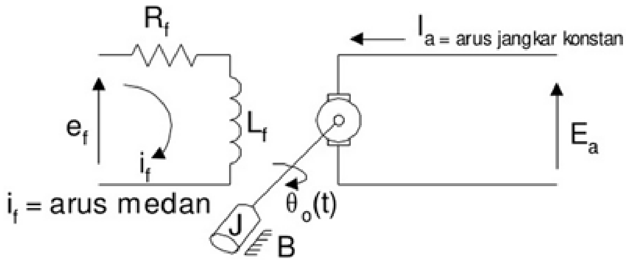
Sehingga

$$\frac{\theta_o(s)}{E_{g(s)}} = \frac{K_T}{s[J(L_m+L_{g)}s^2+[(R_m+R_g)J+(L_m+L_{g)}B]s+(R_m+R_g)B+K_eK_T} \text{ ....(4-91)}$$

Sehingga dari persamaan (4-87) sampai persamaan (4-91) didapat:

$$\frac{\theta_o(s)}{E_f(s)} = \frac{\theta_o(s)}{E_g(s)} x \frac{E_g(s)}{E_f(s)} \text{ ....(4-92)}$$

4.3.5.5. Model Matematika Motor dengan Penguatan Arus Medan



Gambar 4.27 Motor DC Pengontrol Penguat Arus Medan

Torsi yang dihasilkan motor adalah:

$T \ \cong \theta_o$

$\cong \ i_f$ adalah konstan

$T = K_T i_f$

Perhatikan *loop* pada arus medan

$e_f = i_f R_f + L_f \frac{di_f}{dt}$

$E_f(s) = I_f(s)R_f + sL_f I_f(s)$ ....(4-92)

Persamaan torsi dari motor disubstitusikan ke persamaan (4-92) adalah

$K_T i_f = J \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + B \frac{d\theta_0}{dt}$

$K_T i_f(s) = Js^2\theta_o(s) + Bs\theta_o(s)$

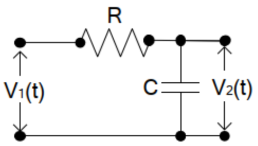
$i_f(s) = \frac{(Js^2+Bs)\theta_o(s)}{K_T}$ ....(4-93)

Dari persamaan (4-93) dan (4-93) diperoleh

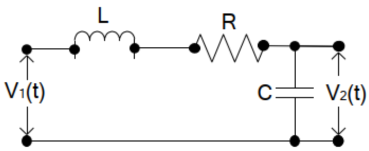
$\frac{\theta_o(s)}{E_f(s)} = \frac{K_T}{(R_f+sL_f)(Js^2+Bs)}$ ....(4-94)

Soal-Soal

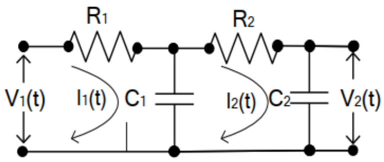
1. Selesaikan rangkaian –rangkaian di bawah ini yang terdiri dari suatu induktansi L (Henry) tahanan R (Ohm), dan kapasitansi C (Farad) dengan menggunakan hukum Kirchoff pada sistem berikut ini:
2. Dapatkan fungsi alih dari setiap rangkaian tersebut dan simulasikan ke dalam kode MATLAB dengan menentukan lebih awal nilai-nilai dari komponen pasif tersebut.



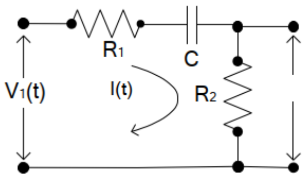
(a)



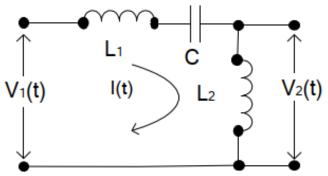
(b)



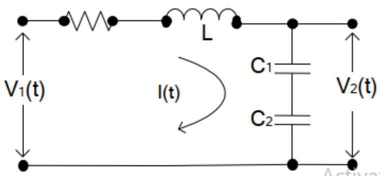
(c)



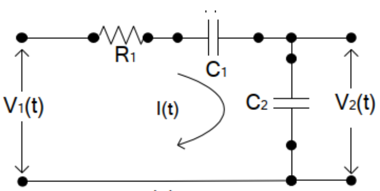
(d)



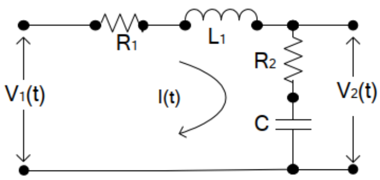
(e)



(f)

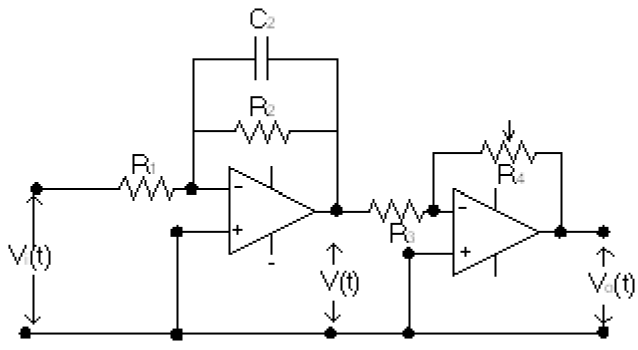


(g)



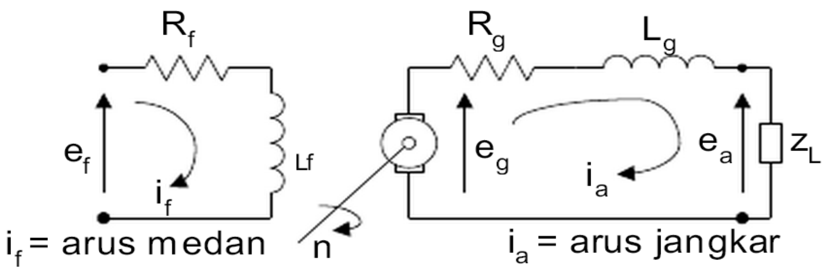
(h)

3. Dapatkan fungsi alih dari rangkaian *op-amp* berikut:



(c)

4. Tentukan persamaan diferensial dari rangkaian motor DC penguat terpisah tersebut serta dapatkan kinerja dari rangkaian tersebut dengan menggunakan *software* MATLAB.



BAB 5

REPRESENTASI MATEMATIKA DARI MODEL FISIK SISTEM MEKANIK DAN PNEUMATIK

Setelah mempelajari bagian ini maka:

- ✓ Dapat membuat persamaan diferensial dari sistem mekanik pneumatik
- ✓ Dapat mentransformasikan persamaan diferensial ke persamaan Laplace dari model mekanik dan pneumatik
- ✓ Dapat menentukan sistem masukan dan keluaran dari suatu rangkaian
- ✓ Dapat menentukan fungsi alih dari suatu model fisis
- ✓ Dapat mengaplikasikan *software* MATLAB pada rangkaian pemodelan
- ✓ Dapat menampilkan dan mengetahui grafik dari sistem mekanik dan pneumatik
- ✓ Dapat membandingkan hasil keluaran dan menganalisa kinerja dari sistem

5.1. Introduksi

Perkembangan teknologi dan sain pada bidang mekanikal dan pneumatik begitu pesat dan bahkan sejalan dengan melaksanakan kolaborasi antara sistem mekanik dan pneumatik contohnya dalam penggunaan ekskavator, eskalator, translator, *lift*. Kombinasi itu tidak hanya berhenti pada itu namun berkolaborasi pula dengan sistem elektrik maupun elektronik serta teknik *programming* yang pesat.

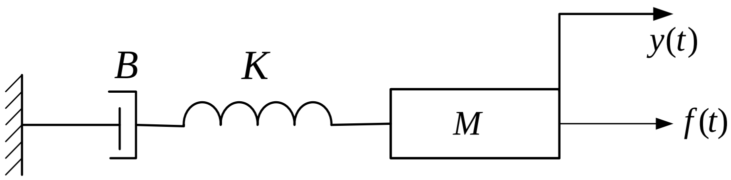
Untuk dapat analisis dan desain sistem kendali, sistem fisis harus dibuat model fisisnya yaitu dalam bentuk model matematis. Kumpulan-kumpulan persamaan yang menggambarkan dinamika suatu sistem secara memadai dapat di turunkan dari model matematis yang diturunkan dari hukum-hukum fisis sistem tersebut. Dinamika sistem mekanis dimodelkan dengan hukum-hukum Newton. Dinamika sistem, sistem elektrik dimodelkan dengan hukum-hukum Kirchoff, Ohm. Model matematis tersebut dapat ditingkatkan akurasinya dengan memodelkan secara lebih lengkap, bila diperlukan dalam analisis yang teliti perlu kompromi antara kesederhanaan model dengan akurasi hasil analisis. Kesederhanaan model dicapai dengan memperhatikan faktor-faktor penting saja dalam pemodelan dan faktor-faktor lain dapat diabaikan.

5.2. Model Matematika pada Sistem Mekanik

Dalam sistem mekanik hal yang terpenting adalah bagaimana dapat menggambarkan kondisi sistem tersebut, untuk menggambarkan sebuah sistem mekanik yang paling sederhana umumnya terdiri dari sebuah pegas dan sebuah peredam, karena setiap benda memiliki kelembaman sendiri dan elastisitas tersendiri. Untuk memahami hal tersebut dapat di gambarkan sebagai berikut:

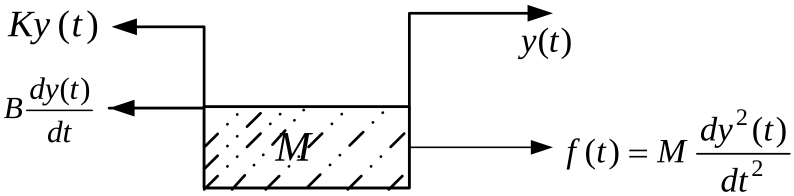
5.2.1. Model Pegas Seri dengan Redaman

Bila pada sistem tersebut dengan balok memiliki massa (M) elastisitas (K) dan momen kelembaman (B) maka pada sistem, dan pada sistem tersebut diberikan gaya tarik sebesar f(t) dengan jarak y(t) maka pada sistem tersebut dapat dijelaskan pada gambar (5-2).



Gambar 5.1 Model Mekanik Sistem Seri

Menurut hukum newton bahwa seluruh gaya yang bekerja pada sistem tersebut adalah sama dengan nol, artinya benda dalam keadaan setimbang. Bila gaya yang diberikan lebih besar dari pada gaya yang bekerja pada sistem tersebut maka benda akan bergerak dengan jarak y(t) sesuai dengan arah gaya yang diberikan, demikian juga sebaiknya. Perhatikan gambar (5-2) komponen gaya-gaya yang bekerja pada sistem tersebut dapat terlihat dengan jelas.



Gambar 5.2 Gaya-Gaya yang Bekerja pada Sistem

Dari gambar (5-2) dapat diuraikan sebagai berikut: pada balok terdapat gaya yang bekerja $f(t) = M\frac{dv(t)}{dt} = M\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} = Ma(t)$ massa dikalikan dengan percepatan karena bergeser dengan jarak $y(t)$ karena bergerak dengan jarak $y(t)$ maka ada kecepatan sebesar $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, dan $a(t) = \frac{dy^2(t)}{dt^2}$dengan arah ke kanan, dan pada pegas terdapat gaya pegas sesuai hukum pegas, sebesar $Ky(t)$, pada redaman terdapat gaya sebesar $B\frac{dy(t)}{dt}$ apa bila dijumlahkan maka akan terdapat gaya sebagai berikut:

$Ky(t) + B\frac{dy(t)}{dt} - M\frac{dy^2(t)}{dt^2} = f(t)$

$Ky(t) + B\frac{dy(t)}{dt} - M\frac{dy^2(t)}{dt^2} = f(t)$ ....(5-1)

Bila persamaan (5-1) ditransformasikan ke dalam bentuk Laplace maka menjadi:

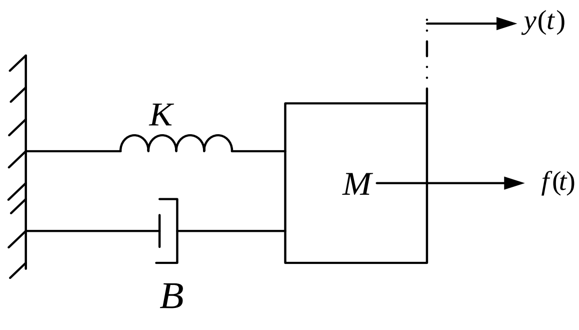
$KY(s) + BsY(s) - Ms^2Y(s) = F(s)$

$(K + Bs - Ms^2)Y(s) = F(s)$ ....(5-2)

Pada sistem tersebut adalah diberikan gaya $f(t)$ maka sistem diberikan masukan sebesar $f(t)$ dari sistem tersebut bila diberikan masukan $f(t)$ maka keluaran dari sistem tersebut adalah pergeseran $y(t)$ sehingga dalam bentuk Laplace dapat ditulis perbadingan antara keluaran dan masukan disebut dengan fungsi alih, adapun hasil tersebut dengan memanipulasi persamaan (5-2) sebagai berikut:

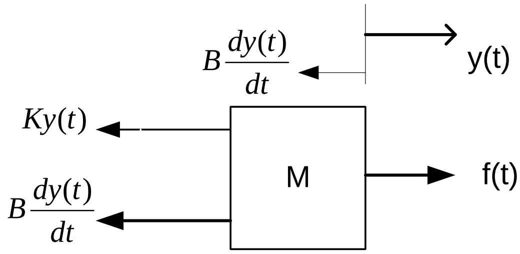
$\frac{Y(s)).}{F(s)} = \frac{1}{(K+Bs-Ms^2)}$.. (5-3)

5.2.2. Model Pegas Paralel dengan Redaman



Gambar 5.3 Sistem Mekanik 2

Gaya-gaya yang bekerja pada sistem tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 5.4 Gaya-Gaya yang Bekerja pada Sistem 2

Persamaan yang terjadi pada sistem tersebut adalah sebagai berikut:

$f(t) = M\frac{d^2t}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t)$ .... (5-4)

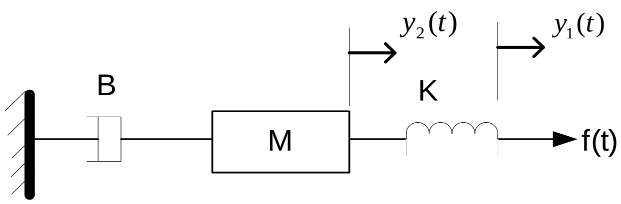
Dengan melakukan transformasi Laplace maka didapat persamaan berikut:

$F(s) = Ms^2Y(s) + BsY(s) + KY(s)$

$(K + Bs + Ms^2)Y(s) = F(s)$..(5-5)

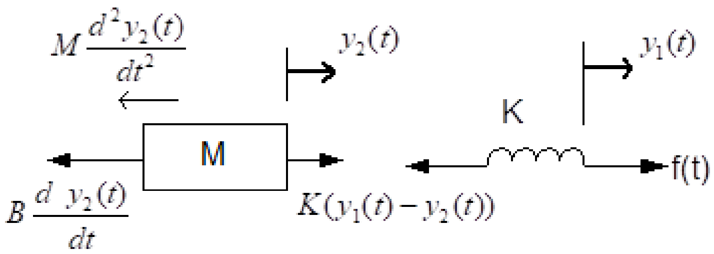
5.2.3. Model Pegas dan Redaman Diantara Massa

Bila diketahui sebuah sistem mekanik seperti pada gambar (5-4) maka gaya-gaya yang bekerja pada sistem tersebut dapat digambarkan seperti pada gambar (5-6).



Gambar 5.5 Sistem Mekanik 2

Dari gambar (5-5) dapat diuraikan bahwa gaya yang bekerja pada massa (M) dipengaruhi oleh pegas dan redaman serta pergeseran massa tersebut bergeser dengan jarak y2(t) dan y1(t) sehingga kalau digambarkan menjadi berikut.



Gambar 5.6 Gaya-Gaya yang Bekerja pada Sistem 3

Dari gambar (5-6) dapat ditulis kembali persamaan gaya yang bekerja sebagai berikut:

$$f(t) = K(y_1(t) - y_2(t)$$

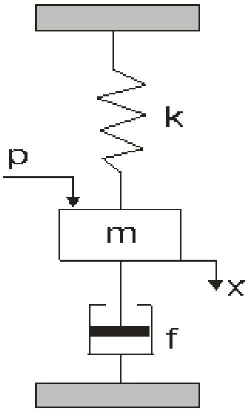
$$K(y_1(t) - y_2(t)) = M\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + B\frac{dy_2(t)}{dt} \quad \text{...(5-5)}$$

$$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt} = M\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} = Ma(t) \quad \text{.. (5-6)}$$

Transformasi Laplace dari persamaan (5-5) adalah sebagai berikut:

$$K(Y_1(s) - Y_2(s)) = Ms^2Y_2(s) + BsY_2(s) \quad \text{...(5-7)}$$

5.2.4. Model Sistem Mekanis Vertikal



Ket:
p : gaya
m : massa
x : perpindahan dari massa
k : konstanta pegas
f : koefisien gesekan fiskos

Gambar 5.7 Gaya-Gaya yang Bekerja pada Sistem Mekanis Vertikal

$\sum F = ma$.. (5-8)

$-f\frac{dx}{dt} - kx + p = m\frac{d^2x}{dt^2}$ .... (5-9)

$p = m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx$ ....(5-10)

Apabila gaya (p) dianggap sebagai masukan dan perpindahan (x) sebagai keluaran maka:

Persamaan Laplace-nya

P(s) $= ms^2X(s) + fsX(s) + kX(s)$

$= (ms^2 + fs + k)\,X(s)$ ....(5-11)

Sehingga fungsi alihnya

G(s) $= \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{\cancel{X(s)}}{(ms^2+fs+k)\,\cancel{X(s)}}$

$= \frac{1}{(ms^2+fs+k)}$..(5-12)

BAB 6

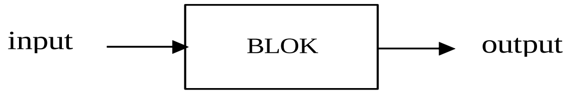
PENYEDERHANAAN FUNGSI BLOK DARI SISTEM

Setelah mempelajari bab ini maka:

1. Mampu membuat sistem blok
2. Mampu menjumlahkan blok diagram secara *loop* terbuka
3. Mampu menjumlahkan blok diagram *loop* tertutup
4. Mampu menyederhanakan *loop* lebih dari satu
5. Mampu menyederhanakan *loop* terbuka lebih dari satu
6. Mampu menjumlahkan serta menyederhanakan *loop* banyak
7. Mampu membuat rangkai dengan *loop* sederhana menerapkan formula sederhana
8. Mampu menyederhanakan *loop* tertutup dengan metode dan aturan yang ada
9. Mampu menjawab sial latihan-latihan

6.1. Dasar-Dasar Diagram Blok/Kotak

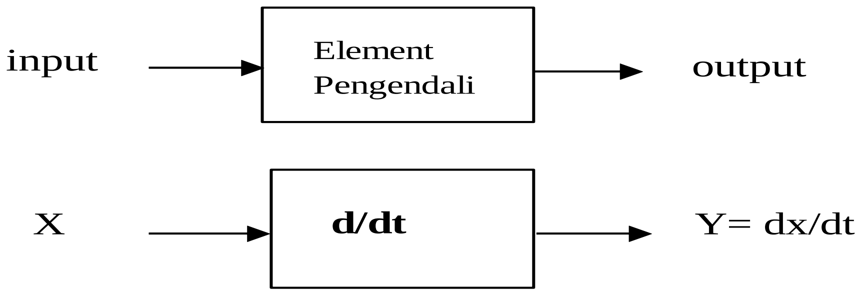
Diagram blok adalah suatu pernyataan gambar yang ringkas, dari gabungan sebab dan akibat antara masukkan dan keluaran dari suatu sistem.



Gambar 6.1 Blok Diagram sebagai Representasi Fungsi Alih G(s)

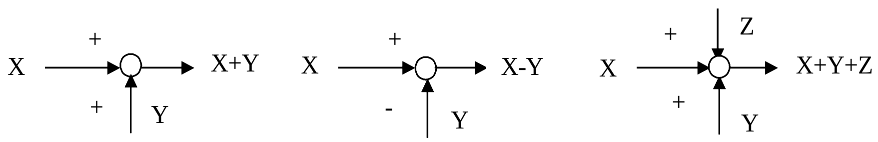
Blok/Kotak adalah: Biasanya berisikan uraian dan nama elemennya, atau simbol untuk operasi matematis yang harus dilakukan pada masukkan untuk menghasilkan Keluaran

Tanda anak panah: Menyatakan arah informasi aliran isyarat atau unilateral. Sebagai contoh sederhana diperlihatkan sbb.:



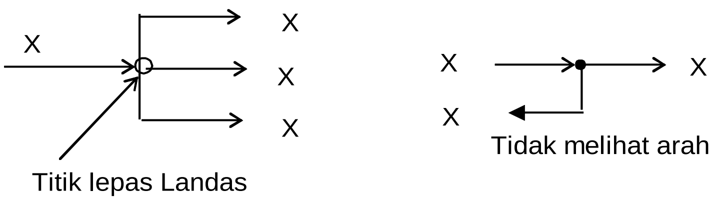
Gambar 6.2 *Block Plan* Pengganti Sistem

Ciri-ciri operasi penjumlahan dan pengurangan, agar dapat digambarkan secara khusus, maka bentuk blok seperti distas diubah menjadi sebuah lingkaran kecil yang disebut dengan titik penjumlahan, dengan tanda plus (+) dan atau minus (-), yang tetap sesuai dengan anak-anak panah yang memasuki lingkaran. Sedangkan keluarannya (*output*) adalah jumlah aljabar dari inputnya. Contoh:



Gambar 6.3 Blok Pengganti Rangkaian Percabangan pada Sistem

Agar dapat menggunakan isyarat yang sama sebagai suatu masukan oke lebih satu blok atau titik penjumlahan digunakan sebuah titik lepas landas. Hal ini menunjukkan isyarat tersebut berjalan tanpa berubah sepanjang lintasan-lintasan yang berbeda ke beberapa tujuan.

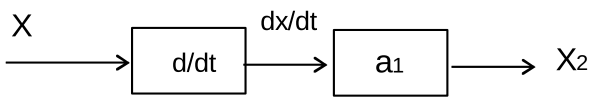


Gambar 6.4 Blok Pengganti Rangkaian Titik Percabangan Sistem Umpan Balik

Contoh: Gambarkan diagram blok dari persamaan matematika sebagai berikut:

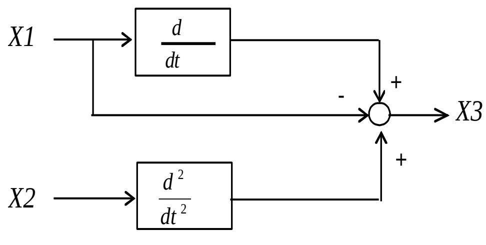
a) $X_2 = a_1$ (dx/dt) di sini ada dua operasi yang harus ditentukan yaitu a_1 dan d/dt

a) $X_2 = a_1 \left(\frac{dx}{dt} \right)$



b)

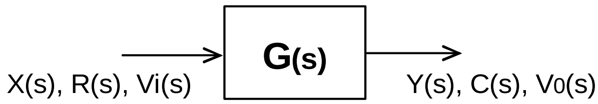
$$X_3 = \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} - X_1$$



Gambar 6.5 Blok Pengganti Rangkaian Percabangan Persamaan

Pada umumnya sistem pengendalian praktis terdiri dari banyak komponen. Maka untuk menyederhanakan dalam menganalisa dipakai blok diagram. Di mana tiap-tiap komponen digambarkan oleh sebuah kotak yang mempunyai input dan *output*, sedangkan di dalamnya dituliskan bentuk *transfer function* dari komponennya (Ingat dalam fungsi S= F(s). dan kemudian ditunjukkan arah alirannya: ada 2 bagian yang penting:

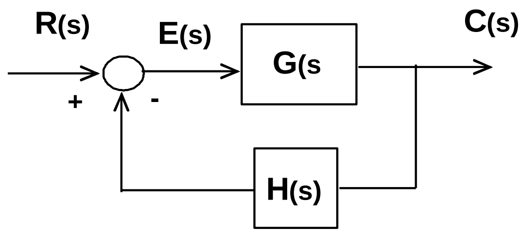
1. Hubungan Input dan *Output* (*Transfer Function*)



2. *Sensing* (*Error Detector*) suatu gambaran berupa lingkaran kecil dengan gambar silang di dalamnya, atau merupakan simbol (penjumlah dan atau pengurangan), tergantung dari tandanya. Dengan demikian error detector menghasilkan sinyal, yang merupakan perbedaan antara input dasar (*referent*) dan sinyal *feedback* dari sistem kontrol/pengaturan kea rah kendali sistem.

Gambar 6.6 Blok Pengganti Rangkaian *Summing Point*

Bentuk Blok Diagram Sistem Tertutup (*Close Loop Sistem*)



$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{G_{(s)}}{1 + H_{(s)} \cdot G_{(s)}}$$

Gambar 6.7 *Block Plan* Rangkaian G(s) dengan Umpan Balik H(s)

Di mana:
R(s) adalah *Input Laplace Transform*
C(s) adalah *Output Laplace Transform*
G(s) adalah *Transfer Function Forward Element*
H(s) adalah *TF. Feedback Element*
E(s) adalah *Error Signal*
C(s)/R(s) adalah *Closed Loop Transfer Function*
E(s)/R(s) adalah *Error Ratio*
B(s)/R(s) adalah *Primary Feedback Ratio*

6.2. Penyederhanaan Diagram Blok

Dalam penyederhanaan diagram blok sangat penting untuk diperhatikan, sebab blok-blok hanya dapat dihubungkan secara seri jika keluaran suatu blok tidak dipengaruhi oleh blok-blok berikutnya. Tetapi apabila ada pengaruh pembebanan antar komponen maka, perlu dilakukan penggabungan dari beberapa komponen menjadi satu blok/kotak saja.

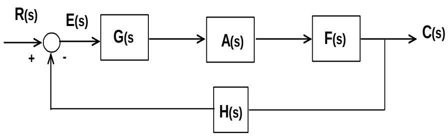
Untuk diagram blok yang melibatkan beberapa *loop* berumpan balik maju, maka selangkah demi selangkah dari komponen-komponennya perlu diperhatikan, dalam penyederhanaan diagram blok/kotak:

1. Hasil kali fungsi alih (*transfer function*) pada arah umpan maju harus tetap sama.
2. Hasil kali fungsi alih pada pengelilingan *loop* harus tetap sama.

Suatu bentuk aturan umum untuk menyederhanakan diagram blok adalah memindahkan titik cabang dan titik penjumlahan, lalu kemudian menyederhanakan umpan balik di dalamnya.

Contoh Soal 1:

Carilah fungsi alih *(transfer function*) dari suatu sistem yang terdiri dari bentuk gambar diagram blok/kotak sistem tertutup sbb.:



R(s) = Input Frekuensi
C(s) = Sinyal *Output*
G(s) = Sebagai Pengontrol
H(s) = TF. dari *Feedback Element*
E(s) = Error *Signal*
A(s) = TF. dari *Amplifier*
F(s) = TF. dari Filter
B(s) = Sinyal *Feedback*

Gambar 6.8 *Block Plan* Rangkaian G(s) dengan Umpan Balik H(s) Contoh 1

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s) = G_p(s) \cdot A(s) \cdot F(s)$$

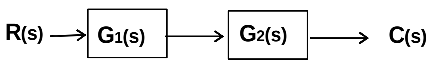
$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$C(s) = G(s) \times E(s)$$
$$B(s) = H(s) \times C(s)$$
$$\frac{C(s)}{G(s)} = E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s) \times C(s)$$
$$\therefore \frac{C(s)}{G(s)} = R(s) - H(s) \times C(s) \cdot \rightarrow R(s)$$
$$Inputmenyatakanbahwa:$$
$$R(s) = \left[\frac{1}{G(s)} + H(s) \right] \times C(s)$$
$$\therefore maka \ldots \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \times H(s)} \ldots\ldots terbukti$$

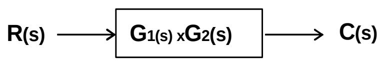
6.3. Dasar Sistem Reduksi Diagram Blok-Kotak

1. Bentuk dari elemen bertingkat:

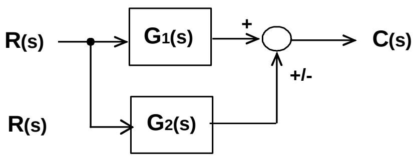
Diagram asal

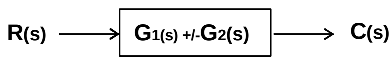


Hasil Reduksi

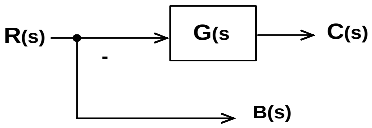


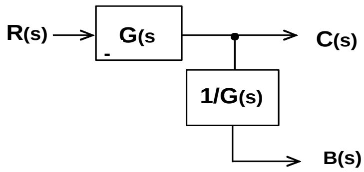
2. Penambahan dan pengurangan



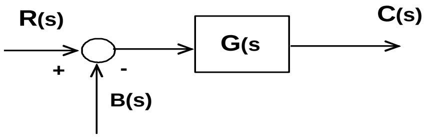


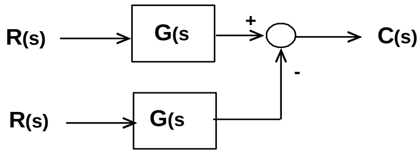
3. Percabangan



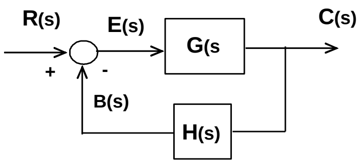


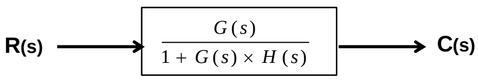
4. Starting Point





5. Sistem *Loop*

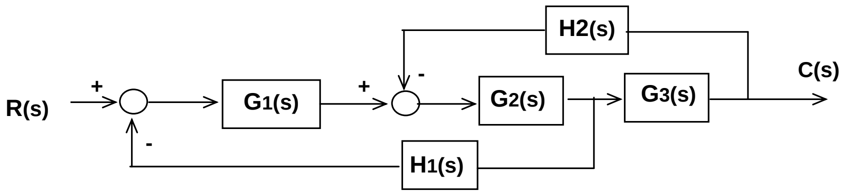




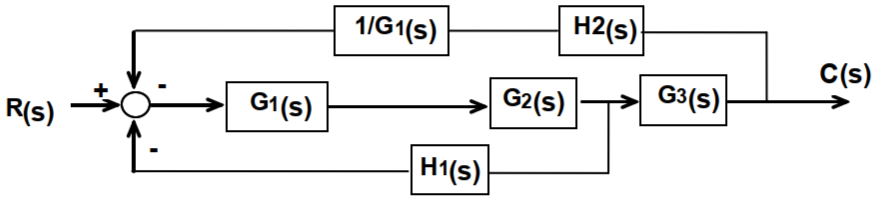
6.4. Latihan Soal dan Jawaban

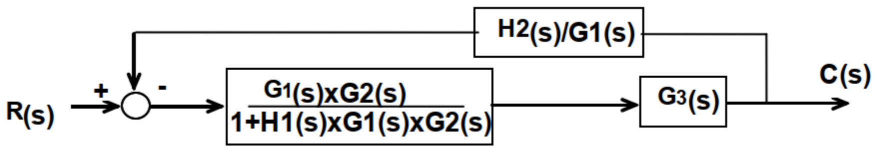
Contoh soal 2:

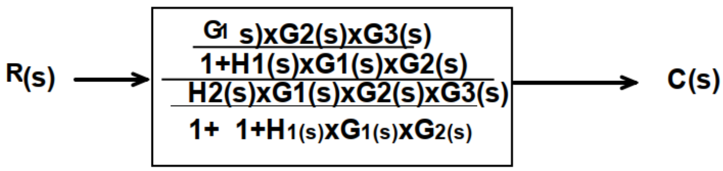
Ringkaslah diagram blok di bawah ke dalam untai terbuka dan tentukan fungsi alih dari sistem, apabila $R_{(s)}$ sebagai input dan $C_{(s)}$ sebagai *output*. Kerjakan dengan cara selangkah demi selangkah (*step by step*)!



Gambar 6.9 *Block Plan* Rangkaian G(s) dengan Umpan Balik H(s) Contoh 2

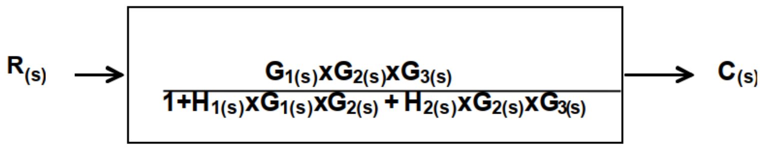






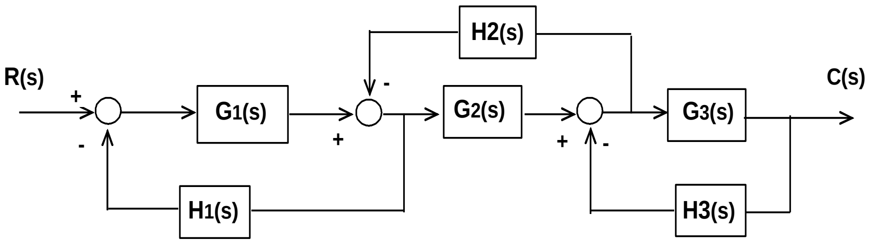
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\left(G_{1(s)} \cdot G_{2(s)} \cdot G_{3(s)}\right) \times \left(1 + H_{1(s)} \cdot G_{1(s)} \cdot G_{2(s)}\right)}{\left(1 + H_{1(s)} \cdot G_{1(s)} \cdot G_{2(s)}\right) + \left(H_{2(s)} \cdot G_{2(s)} \cdot G_{3(s)}\right) \times \left(1 + H_{1(s)} \cdot G_{1(s)} \cdot G_{2(s)}\right)}$$

$$\therefore \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_{1(s)} \times G_{2(s)} \times G_{3(s)}}{\left(1 + H_{1(s)} \cdot G_{1(s)} \cdot G_{2(s)}\right) + \left(H_{2(s)} \cdot G_{2(s)} \cdot G_{3(s)}\right)}$$



Contoh Soal 3

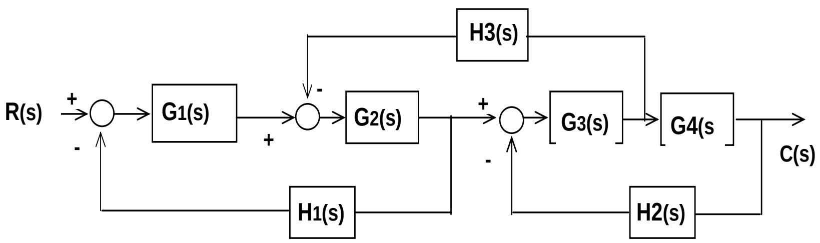
Ringkaslah diagram blok di bawah ke dalam untai terbuka dan tentukan fungsi alih dari sistem, apabila $R_{(s)}$ sebagai input dan $C_{(s)}$ sebagai *output*. Kerjakan dengan cara selangkah demi selangkah (*step by step*)!



Gambar 6.10 *Block Plan* Rangkaian G(s) dengan Umpan Balik H(s) Contoh 3

Soal 3

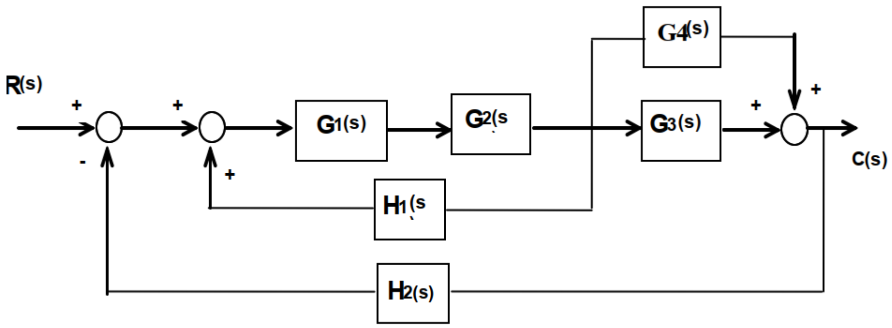
Ringkaslah diagram blok di bawah ke dalam untai terbuka dan tentukan fungsi alih dari sistem, apabila $R_{(s)}$ sebagai input dan $C_{(s)}$ sebagai *output*. Kerjakan dengan cara selangkah demi selangkah (*step by step*)!



Gambar 6.11 *Block Plan* Rangkaian G(s) dengan Umpan Balik Ganda H(s) Soal 3

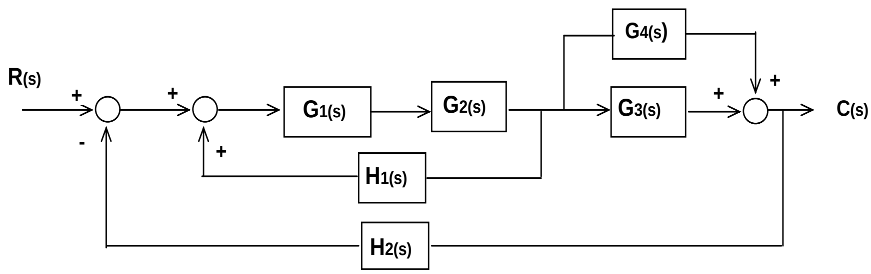
Soal 4:

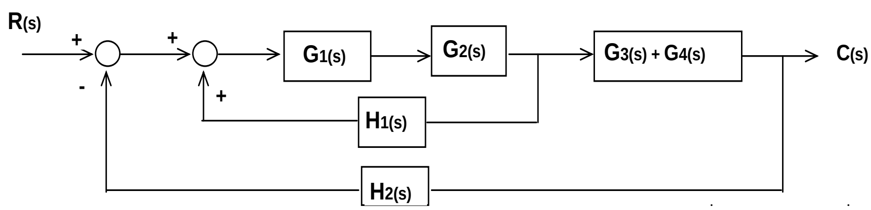
Ringkaslah diagram blok di bawah ke dalam untai terbuka dan tentukan fungsi alih dari sistem, apabila $R_{(s)}$ sebagai input dan $C_{(s)}$ sebagai *output*. Kerjakan dengan cara selangkah demi selangkah (*step by step*)!

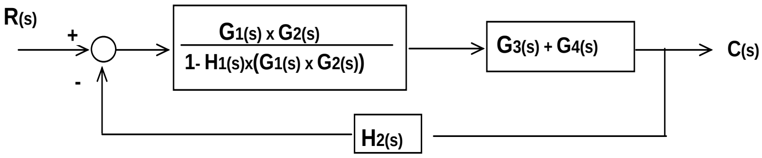


Gambar 6.12 *Block Plan* Rangkaian G(s) dengan Umpan Balik Ganda H(s) Soal 4

Jawaban



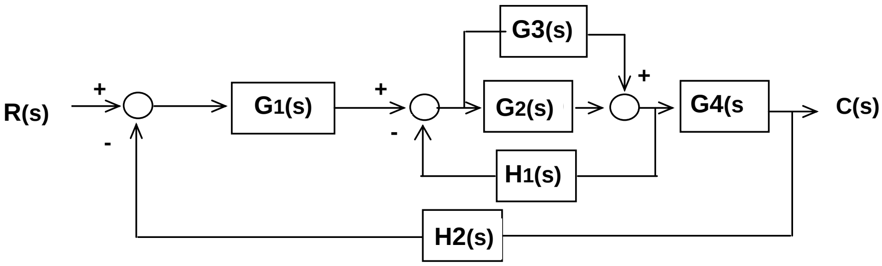




Lanjutkan……

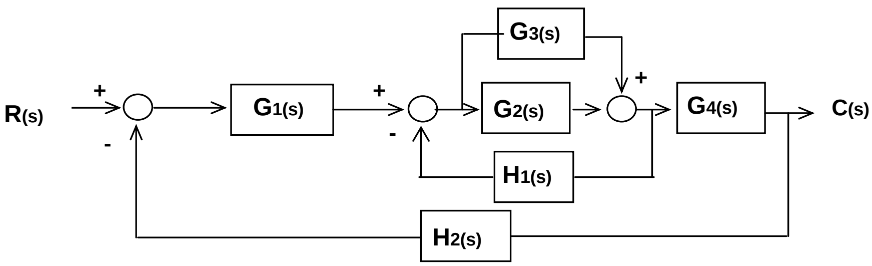
Soal 5:

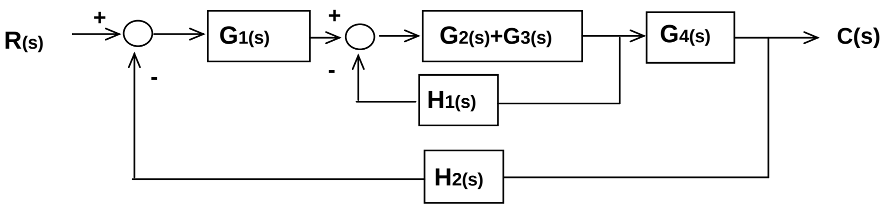
Ringkaslah diagram blok di bawah ke dalam untai terbuka dan tentukan fungsi alih dari sistem, apabila $R_{(s)}$ sebagai input dan $C_{(s)}$ sebagai *output*. Kerjakan dengan cara selangkah demi selangkah (*step by step*)!

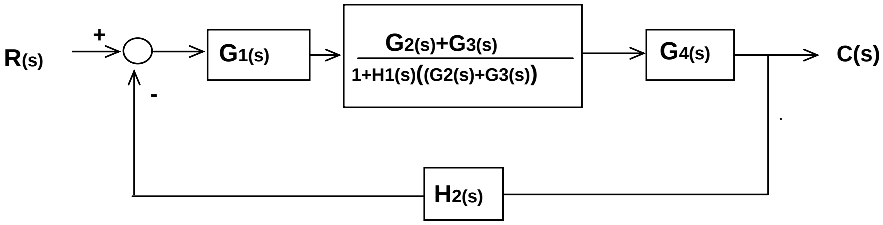


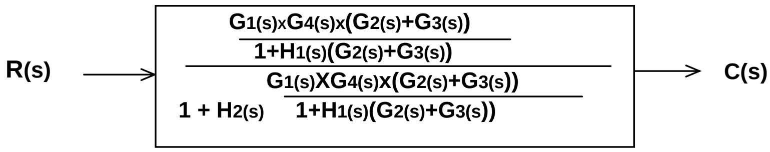
Gambar 6.13 *Block Plan* Rangkaian G(s) dengan Umpan Balik Ganda H(s) Soal 5

Jawaban



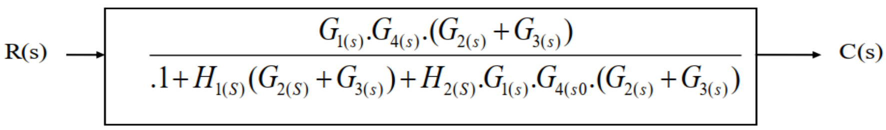






$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{\dfrac{G_{1(s)}.G_{4(s)}\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)}{1+H_{1(s)}.\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)}}{1+H_{2(s)}\dfrac{G_{1(s)}.G_{4(s)}\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)}{1+H_{1(s)}\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)}}=\frac{\dfrac{G_{1(s)}.G_{4(s)}\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)}{1+H_{1(s)}.\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)}}{\dfrac{1+H_{1(s)}.\left(G_{1(s)}+G_{2(s)}\right)}{1+H_{1(s)}.\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)}+H_{2(s)}\dfrac{G_{1(s)}.G_{4(s)}\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)}{1+H_{1(s)}.\left(G_{2(s)}.G_{3(s)}\right)}}$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{\left[\left(G_{2(s)}+G_{2(s)}\right)\times G_{1(s)}.G_{4(s)}\right]\times\left[1+H_{1(s)}.\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)\right]}{\left[1+H_{1(s)}.\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)\right].\left[1+H_{1(s)}.\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)\right]+H_{2(S)}.G_{1(s)}.G_{4(s0}.\left(G_{2(s)}+G_{3(s)}\right)}$$



DAFTAR PUSTAKA

Bequette, B.W. *Introduction to SIMULINK*, in MATLAB 6 Release 12 2001.

Dukkipati, R.V. *Analysis and Design of Control System Using MATLAB*, ed. I. 978-81-224-2484-32006, 4835/24, Ansari Road, Daryaganj, New Delhi - 110002: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Halvorsen, H. P. 2011. *Introduction to Simulink*. D.o.E.E. Faculty of Technology, Information Technology and Cybernetics. Editor 2011: Postboks 203, Kjølnes ring 56, N-3901 Porsgrunn, Norway.

Majhi, P.S. 2009. *Advanced Control Systems*. Department of Electronics and Electrical Engineering: Indian Institute of Technology, Guwahati.

Mirza, D.S.M. *Introduction to Matlab*, in Pakistan Institute of Engineering and Applied Sciences, D.o.P.A. Mathematics. Editor. Pakistan.

Munther, T. 2005. *Simple Exercises in Matlab/Simulink I*, in 051123, C.S.a.E.E. School of Information Technology. Editor 2005. Halmstad University.

Nise, N.S. 2000. *Control System Engineering*. New York: John Willey & Son.

Of, U. and N.U. Tyne. 2003. *Matlab/Simulink Tutorial*. Vol. 2. School of Electrical, Electronic and Computer Engineering.

Ogata, K. 2010. *Modern Control Engineering*. Fifth Edition. Editor: 2010: Prentice Hall.

R. H. Sianipar, I.K.W. 2013. *Matlab untuk Pemrosesan Sinyal Citra Digital*. Bandung: Informatika.

The MathWorks, I. 2009. *Getting Started Guide Matlab & Simulink 7*. I. The MathWorks. Editor 2009, www.mathworks.com/patents

Ventus, D.A. 2009. *Control Engineering*. Ventus Publishing Aps.

Widiarsono, Teguh. 2005. *TUTORIAL PRAKTIS BELAJAR MATLAB*.

y, S.t.o.r.m.y.A.t.t.a.w.a. 2012. *MATLAB A Practical Introduction to Programming and Problem Solving*. Elsevier. Editor 2012. Butterworth-Heinemann is an imprint of Elsevier 225 Wyman Street, Waltham, MA 02451, USA The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford, OX5 1GB, UK.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Dr. Ir. I Ketut Wiryajati, S.T., M.T., IPU., ASEAN.Eng. lahir di Penyaringan pada April 1966. Pendidikan formal dimulai dengan, pendidikan SD, SMP dan SMAN semua ditempuh di kota kelahirannya Negara, kuliah S-1 (UNUD 1996) Teknik Elektro, S-2 (ITS 2003) Teknik Elektro, S-3 (UNUD 2020) Teknik Elektro, Pendidikan Profesi Ir. (UNUD 2018), saat ini ia sebagai Insinyur Profesional Utama pada PII, ia juga telah teregistrasi sebagai ASEAN Engineer. Selain aktif sebagai konsultan pada bidang MEP dan Komputer Dr. Wiryajati juga aktif sebagai Tenaga Ahli Elektronika Bandara, Tenaga Ahli Mekanikal dan Elektrikal di perusahaan swasta nasional. Keaktifan dalam mengajar sudah dimulai sejak aktif sebagai dosen tetap pada Teknik Elektro Universitas Mataram, NTB, Indonesia. Selain aktif berorganisasi ia juga aktif sebagai penulis buku dan sudah menerbitkan jurnal nasional maupun internasional dan ketertarikan riset adalah pada bidang Konversi Daya untuk Pengembangan Energi Terbaharukan (*Renewable Energy*), *Power Electronics and Drives*, dan motor-motor listrik. Ia merupakan member IET sejak 2014, dan IEEE.

I Nyoman Wahyu Satiawan, S.T., M.Sc., Ph.D. adalah dosen di Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Mataram sejak tahun 1998. Pendidikan Strata 1 (S-1) di Jurusan Teknik Elektro Universitas Udayana diselesaikan tahun 1996. Pendidikan lanjut Strata 2 (*Master Degree*) dan Strata 3 (*Doctorate Degree*) di Liverpool John Moores University diselesaikan pada tahun 2000 dan 2013. Dr. Satiawan saat ini adalah Ketua Laboratorium Teknik Kendali Jurusan Teknik Elektro Universitas Mataram dan Ketua Kelompok Penelitian *Power Electronics and Drives* Fakultas Teknik, Universitas Mataram sejak Tahun 2013. Bidang riset yang ditekuni adalah di bidang Konversi Daya untuk Pengembangan Energi Terbaharukan (*Renewable Energy*). Dalam 10 tahun terakhir Dr. Satiawan telah menghasilkan puluhan jurnal baik nasional maupun internasional dan juga prosiding konferensi Internasional.

Sistem KENDALI

(TEORI DAN APLIKASI PADA MATLAB DAN SIMULINK)

BAGIAN 1

Teknik kendali pada bidang keteknikan bukanlah sesuatu yang baru, namun sudah menjadi kebutuhan bagi mahasiswa, praktisi maupun analis. *Modeling* bertujuan untuk mendekati sebuah bentuk asli dari sebuah sistem dengan beberapa metode. Dengan membaca dan memahami dari buku ini pembaca dapat lebih cepat mendapatkan hasil yang lebih mendekati model sesungguhnya. Buku ini merupakan hasil pembelajaran secara bertahap bagi mahasiswa teknik yang belajar sistem *modeling* dengan MATLAB.

Buku bagian satu ini mengungkapkan secara komprehensif tentang konsep dan aplikasi dengan diikuti *koding* dan simulasi. Ulasan *koding* dijelaskan dengan rinci sehingga mudah dipahami oleh pembaca. Sajian pada bab demi bab meliputi sebagai berikut: Pengenalan MATLAB dan Simulink pada sistem kendali, matriks diuraikan dengan detail serta penulisan *koding* secara lengkap disertai kasus, *koding* persamaan Laplace dari teori dan penggunaan, pemodelan dari teori serta contoh kasus dijelaskan secara mendetail dengan program, penyederhanaan fungsi diuraikan secara detail dan terinci disertai dengan contoh kasus dibahas pada akhir bab dari buku ini.

Penerbit Deepublish (CV BUDI UTAMA)
Jl. Kaliurang Km 9,3 Yogyakarta 55581
Telp/Fax : (0274) 4533427
Anggota IKAPI (076/DIY/2012)
cs@deepublish.co.id
Penerbit Deepublish
@penerbitbuku_deepublish
www.penerbitdeepublish.com

Kategori : Teknik Elektronika

978-623-02-3247-3 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-623-02-3248-0 (jil.1)
9 786230 232480