

# REPRESENTASI GRAF IDEAL PRIMA DARI GELANGGANG BILANGAN BULAT MODULO $(\mathbb{Z}_n)$ DAN BEBERAPA INDEKS TOPOLOGINYA

## REPRESENTATION PRIME IDEAL GRAPH IN THE RING OF INTEGERS MODULO $(\mathbb{Z}_n)$ AND ITS TOPOLOGICAL INDICES

HINDANI KUSUMA NINGRUM<sup>1</sup>, I GEDE ADHITYA WISNU WARDHANA<sup>2</sup>, SALWA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram.

Jl. Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia. email: [hindani1309@gmail.com](mailto:hindani1309@gmail.com).

<sup>2</sup> Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram.

Jl. Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia. email: [adhitya.wardhana@unram.ac.id](mailto:adhitya.wardhana@unram.ac.id)

<sup>3</sup> Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram.

Jl. Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia. email: [salwa@unram.ac.id](mailto:salwa@unram.ac.id)

**Abstrak.** Representasi suatu graf selain dari grup dapat juga dilakukan pada bidang struktur aljabar yang lain, salah satunya yaitu gelanggang. Graf ideal prima yang dinotasikan dengan  $\Gamma_p(R)$  adalah sebuah graf dengan himpunan simpul  $R \setminus \{0\}$  dan dua simpul  $r_1$  dan  $r_2$  bertetangga jika dan hanya jika  $r_1 r_2 \in P$  untuk setiap  $r_1, r_2 \in R$ , dimana  $R$  suatu gelanggang komutatif dan  $P$  suatu ideal prima dari  $R$ . Selain digunakan untuk merepresentasikan grup ataupun gelanggang, graf juga digunakan pada bidang kimia yaitu untuk merepresentasikan struktur molekul seperti indeks topologi. Pada penelitian ini dicari bentuk representasi graf ideal prima dari gelanggang bilangan bulat modulo  $(\mathbb{Z}_n)$  dan indeks topologinya yaitu indeks Wiener dan indeks Harmonik. Adapun hasil dari penelitian ini yaitu ideal prima gelanggang  $\mathbb{Z}_n$  adalah  $P = \langle \bar{p} \rangle$  untuk  $n = p^k$  dengan  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 1$ . Graf ideal prima dari gelanggang  $\mathbb{Z}_n$  untuk  $n = p$  prima tunggal memiliki bentuk berupa graf kosong berorde  $n - 1$ , sedangkan untuk  $n = p^k$  dan  $k \geq 2$  memiliki  $(p^k - p^{k-1})$  buah subgraf lengkap  $K_{(p^{k-1})}$  dan  $(p^{k-1} - 1)$  buah subgraf bintang  $K_{(1, p^{k-2})}$ . Selain itu, indeks Wiener dan indeks Harmonik yang didapatkan berturut-turut  $\frac{1}{2} \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( \frac{n}{p} - 2 \right) + \left( n - \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} - 2 \right) + \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} \right)$  dan  $\frac{\left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( \frac{n}{p} - 2 \right)}{2(n-2)} + \frac{2 \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} \right)}{n + \frac{n}{p} - 3}$ .

**Kata kunci:** Graf ideal prima, indeks Harmonik, indeks Wiener, subgraf

**Abstract.** Representation of a graph can also be done in other algebraic structures, on of which is a ring. The prime ideal graph  $\Gamma_p(R)$  is a graph with a set of vertices  $R \setminus \{0\}$ , and two vertices  $r_1$  and  $r_2$  are connected if and only if  $r_1 r_2 \in P$ , where  $R$  is a commutative ring, and  $P$  is a prime ideal of  $R$ . In addition to being used represent groups or rings, graph are also used in the field of chemistry to represent molecular structures, such as topological indices. This research to find the representation of the prime ideal graph in the ring of integer modulo  $(\mathbb{Z}_n)$  and its topological indices, namely the Wiener index and the Harmonic index. The result of this research for the ring  $\mathbb{Z}_n$  where  $n = p^k$  with  $p$  as a prime number and  $k \geq 1$ , show that the set of prime ideals in  $\mathbb{Z}_n$  is  $P = \langle \bar{p} \rangle$ . The prime ideal graph of the ring  $\mathbb{Z}_n$  for  $n = p$  prime has an empty subgraph with  $n - 1$  order, where as for  $n = p^k$  and  $k \geq 2$  have  $(p^k - p^{k-1})$  complete subgraphs  $K_{(p^{k-1})}$ ; and  $(p^{k-1} - 1)$  star subgraphs  $K_{(1, p^{k-2})}$ . Furthermore, the obtained Wiener index and Harmonic index are as follows, respectively  $\frac{1}{2} \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( \frac{n}{p} - 2 \right) + \left( n - \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} - 2 \right) + \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} \right)$  and  $\frac{2 \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( \frac{n}{p} - 2 \right)}{2(n-2)} + \frac{\left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} \right)}{n + \frac{n}{p} - 3}$ .

**Key words:** Harmonic index, Wiener index, Prime ideal graph, subgraph,

## PENDAHULUAN

Teori graf merupakan teori yang digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual graf adalah dengan menyatakan objek yang dinyatakan sebagai noktah, bulatan, simpul, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau sisi (Munir, 2010). Representasi graf dari suatu grup telah banyak dilakukan di antaranya yaitu pada penelitian yang dilakukan oleh Aulia pada tahun 2021 tentang Karakteristik Graf Non-Koprima dari Grup Dihedral, penelitian yang dilakukan oleh Nurhabibah pada tahun 2022 tentang Graf Koprima dari Grup *Generalized Quaternion* dan *Numerical Invariants*-nya, serta penelitian yang dilakukan oleh Ramdani pada tahun 2022 tentang Representasi Graf Irisan dari Grup Dihedral  $D_{2n}$  dan *Numerical Invariants*-nya. Penelitian-penelitian di atas menunjukkan bahwa penelitian tentang graf yang merepresentasikan grup telah banyak dilakukan.

Representasi suatu graf dapat juga dilakukan pada bidang struktur aljabar yang lain, salah satunya yaitu gelanggang atau *ring*. Graf dan gelanggang merupakan objek yang abstrak dalam matematika. Representasi graf dari suatu gelanggang digunakan untuk melihat visual bentuknya. Adapun penelitian tentang representasi graf dari gelanggang di antaranya penelitian yang dilakukan oleh Fatahillah dkk. pada tahun 2020 dengan judul “Sifat-Sifat Graf Pembagi Nol pada Gelanggang  $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1} \rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1} \rangle}$ ”, penelitian yang dilakukan oleh Abdulqadr pada tahun 2020 dengan judul “*Maximal Ideal Graph of Commutative Rings*”, serta penelitian yang dilakukan oleh Salih dan Jund pada tahun 2022 dengan judul “*Prime Ideal Graphs of Commutative Rings*”. Penelitian yang dilakukan oleh Salih dan Jund pada tahun 2022 ini memperkenalkan definisi dari graf ideal prima, sehingga hal ini menjadi pembahasan yang menarik untuk dikaji dengan merepresentasikan grafnya pada gelanggang tertentu.

Selain digunakan untuk merepresentasikan grup ataupun gelanggang, graf juga digunakan pada bidang kimia yaitu untuk merepresentasikan struktur molekul. Indeks topologi adalah nilai numerik suatu struktur molekul untuk memprediksi sifat fisiokimia, reaktivitas kimia, atau sifat biologis. Menurut Saeed dkk. (2021) beberapa jenis indeks topologi yaitu indeks topologi berbasis jarak dan indeks topologi berbasis derajat. Berdasarkan jenis indeks topologi tersebut pada penelitian ini digunakan masing-masing satu jenis indeks topologi yaitu indeks Wiener dan indeks Harmonik.

Indeks Wiener merupakan jenis indeks topologi yang berbasis jarak dan indeks topologi yang pertama kali ditemukan, sedangkan indeks Harmonik merupakan jenis indeks topologi yang berbasis derajat.

Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk mengkaji bentuk representasi graf ideal prima, dan menentukan indeks Wiener, serta menentukan Indeks Harmoniknya dari gelanggang bilangan bulat modulo dengan judul “ Representasi Graf Ideal Prima dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo ( $\mathbb{Z}_n$ ) dan Beberapa Indeks Topologinya” untuk  $n = p^k$  dengan  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 1$ .

## METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini yaitu jenis penelitian kepustakaan. Penelitian dilakukan dengan mengumpulkan data dan informasi serta mengkaji buku-buku, jurnal, majalah, dan lain-lainnya tentang teori graf, teori gelanggang, dan indeks topologi. Kajian tentang teori graf yang dikhususkan pada graf ideal prima, dan pada gelanggang bilangan bulat modulo ( $\mathbb{Z}_n$ ), serta indeks topologinya yaitu indeks Wiener dan indeks Harmonik.

Adapun beberapa langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mengumpulkan referensi yang dibutuhkan dan mempelajarinya. Kemudian menganalisa representasi graf ideal prima dari gelanggang bilangan bulat modulo ( $\mathbb{Z}_n$ ) dengan  $n = p$  dan  $n = p^k$  untuk  $k \geq 2$ . Lalu dibuat konjektur tentang graf ideal prima pada gelanggang bulat modulo ( $\mathbb{Z}_n$ ), dan konjektur tentang indeks Wiener, serta indeks Harmoniknya. Kemudian membuktikan konjektur. Jika konjektur terbukti maka konjektur dirumuskan sebagai teorema. Jika tidak terbukti maka dibuat konjektur lain dan dilakukan pembuktian.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

**Definisi 1** (M., Salih, & Jund, 2022)

Misalkan  $R$  suatu gelanggang komutatif dan  $P$  suatu ideal prima dari  $R$ . **Graf ideal prima** dinotasikan  $\Gamma_p(R)$  adalah sebuah graf dengan himpunan simpul  $R \setminus \{0\}$  dan dua simpul berbeda  $r_1$  dan  $r_2$  bertetangga jika dan hanya jika  $r_1 r_2 \in P$  untuk setiap  $r_1, r_2 \in R$ .

**Definisi 2** (Schmuck, 2010)

Indeks Wiener dari graf terhubung  $G$  dinotasikan dengan  $W(G)$  didefinisikan sebagai

$$W(G) = \sum_{(u,v) \subseteq V(G)} d(u,v)$$

dimana  $d(u,v)$  merupakan jarak antara dua simpul  $u$  dan  $v$  di  $G$ .

**Definisi 5.2.2** (Zhong, L, 2022)

Indeks Harmonik dari Graf  $G$  dinotasikan dengan  $H(G)$  didefinisikan sebagai berikut:

$$H(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)}$$

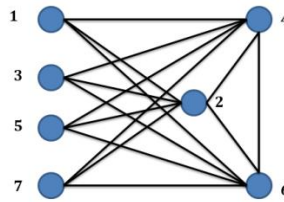
dimana  $\deg(u)$  dan  $\deg(v)$  adalah derajat dari simpul  $u$  dan simpul  $v$  dimana  $u \neq v$ .

Berdasarkan definisi-definisi diatas berikut merupakan beberapa teorema-teorema yang didapatkan antara lain:

**Teorema 1**

Jika  $n = p^k$  untuk  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 1$  maka ideal prima tunggal dari gelanggang komutatif  $\mathbb{Z}_n$  adalah  $P = \langle \bar{p} \rangle$ .

Berdasarkan teorema 1 dapat dibentuk representasi graf ideal prima dari gelanggang  $(\mathbb{Z}_n)$  dengan  $n = 2^3$



Gambar 1 Graf Ideal Prima  $\Gamma_2(\mathbb{Z}_{2^3})$

**Teorema 2**

Jika  $\mathbb{Z}_n$  gelanggang komutatif untuk  $n$  bilangan prima dengan ideal prima  $P = \langle \bar{p} \rangle = \{\bar{0}\}$  maka graf ideal prima  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  merupakan graf kosong berorde  $n - 1$ .

**Bukti:**

Diketahui  $\mathbb{Z}_n$  untuk  $n$  bilangan prima dan ideal prima dari  $\mathbb{Z}_n$  yaitu  $P = \{\bar{0}\}$ . Ambil  $n = p$  bilangan prima sebarang, maka himpunan simpul graf ideal prima  $V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \dots, \overline{p-1}\}$  Berdasarkan Definisi 1, untuk semua  $\bar{a}, \bar{b} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  akan

bertetangga jika  $\overline{ab} \in P$  maka  $\bar{a} \in P$  atau  $\bar{b} \in P$ . Karena  $\{\bar{0}\} \notin V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  maka tidak ada  $\bar{a}, \bar{b} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  yang bertetangga. Jadi,  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_p)$  merupakan graf kosong dengan banyaknya simpul  $|V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))| = n - 1 = p - 1$ . ■

### **Teorema 3**

Jika  $\mathbb{Z}_n$  gelanggang komutatif untuk  $n = p^k$  dimana  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 2$  dengan ideal prima  $P = \langle \bar{p} \rangle$ , maka graf ideal prima  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  memiliki  $(p^k - p^{k-1})$  buah subgraf lengkap  $K_{p^{k-1}}$ .

#### **Bukti:**

Misalkan  $\mathbb{Z}_n$  gelanggang komutatif untuk  $n = p^k$  dimana  $k \geq 2$  dan  $p$  bilangan prima. Diketahui himpunan simpul graf ideal prima  $V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) = \mathbb{Z}_{p^k} \setminus \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \dots, \overline{p^k - 1}\}$  dengan orde  $|V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))| = (p^k - 1)$ . Berdasarkan Definisi 1 dan Teorema 1 maka setiap simpul  $P \setminus \{\bar{0}\}$  akan bertetangga dengan semua simpul graf ideal prima  $V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$ . Kemudian untuk setiap simpul  $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  untuk  $\bar{x}, \bar{y} \notin P$ , karena  $P = \langle \bar{p} \rangle$  maka  $\bar{p} \nmid \bar{x}$  dan  $\bar{p} \nmid \bar{y}$  sehingga  $\bar{x}, \bar{y}$  tidak bertetangga. Oleh karena itu, setiap simpul  $P \setminus \{\bar{0}\}$  dan satu buah simpul  $\bar{x} \notin P \setminus \{\bar{0}\}$  akan membentuk subgraf lengkap  $K_{p^{k-1}}$ . Graf ideal prima  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  memiliki jumlah subgraf lengkap yang terbentuk yaitu  $|V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))| - |P \setminus \{\bar{0}\}| = (p^k - 1) - (p^{k-1} - 1) = p^k - p^{k-1}$ . ■

### **Teorema 4**

Jika  $\mathbb{Z}_n$  gelanggang komutatif untuk  $n = p^k$  dimana  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 2$  dengan ideal prima  $P = \langle \bar{p} \rangle$ , maka graf ideal prima  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  memiliki subgraf bintang  $K_{(1, p^{k-2})}$  dengan jumlah  $(p^{k-1} - 1)$ .

#### **Bukti:**

Misalkan  $\mathbb{Z}_n$  gelanggang komutatif untuk  $n = p^k$  dimana  $k \geq 2$  dan  $p$  bilangan prima. Berdasarkan pembuktian Teorema 4 untuk setiap simpul  $\bar{x} \in P \setminus \{\bar{0}\}$  akan bertetangga dengan semua simpul graf ideal prima  $V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$ . Akibatnya terdapat simpul  $\bar{x} \in P \setminus \{\bar{0}\}$  dan semua simpul  $\bar{a} \in \Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  dapat membentuk subgraf bintang dengan  $\bar{x}$  menjadi simpul pusat. Adapun jumlah subgraf bintang dari graf ideal prima  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  yang terbentuk yaitu  $|P \setminus \{\bar{0}\}| = (p^{k-1} - 1)$ . ■

**Teorema 5**

Jika  $n = p^k$  dengan  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 2$ , maka indeks Wiener graf ideal prima dari gelanggang  $\mathbb{Z}_n$  adalah  $\frac{1}{2} \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( \frac{n}{p} - 2 \right) + \left( n - \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} - 2 \right) + \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} \right)$ .

**Bukti:** Misalkan himpunan simpul graf ideal prima dari gelanggang bilangan bulat modulo  $V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) = \mathbb{Z}_{p^k} \setminus \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \dots, \overline{p^k - 1}\}$  untuk  $n = p^k$  dimana  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 2$  terdapat himpunan ideal prima tanpa  $\{\bar{0}\}$  yang juga bagian dari himpunan simpul  $V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  yaitu  $P \setminus \{\bar{0}\} = \{\bar{p}, \bar{2p}, \bar{3p}, \dots, \overline{(p^{k-1} - 1)p}\}$ . Untuk membuktikan indeks Wiener graf ideal prima dapat dibagi menjadi 3 kasus berdasarkan jarak antar 2 simpul sebagai berikut.

**Kasus 1**

Untuk  $\bar{u}, \bar{v} \in P \setminus \{\bar{0}\}$ , dimana  $\bar{u}, \bar{v} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  dan  $\bar{u} \neq \bar{v}$  diperoleh pasangan  $(\bar{u}, \bar{v})$  sejumlah kombinasi  $\binom{\frac{n}{p}-1}{2}$ .

$$\begin{aligned} W(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) &= \sum_{\bar{u}, \bar{v} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))} d(\bar{u}, \bar{v}) = 1 \binom{\frac{n}{p}-1}{2} = \frac{\left(\frac{n}{p}-1\right)!}{2! \left(\frac{n}{p}-3\right)!} \\ &= \frac{\left(\frac{n}{p}-1\right) \left(\frac{n}{p}-2\right)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{p}-1\right) \left(\frac{n}{p}-2\right) \end{aligned}$$

**Kasus 2**

Untuk  $\bar{u}, \bar{v} \notin P \setminus \{\bar{0}\}$ , dimana  $\bar{u}, \bar{v} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  dan  $\bar{u} \neq \bar{v}$  diperoleh pasangan  $(\bar{u}, \bar{v})$  sejumlah kombinasi  $\binom{n-\frac{n}{p}}{2}$ .

$$\begin{aligned} W(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) &= \sum_{\bar{u}, \bar{v} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))} d(\bar{u}, \bar{v}) = 2 \binom{n-\frac{n}{p}}{2} = 2 \frac{\left(n-\frac{n}{p}\right)!}{2! \left(n-\frac{n}{p}-2\right)!} \\ &= 2 \frac{\left(n-\frac{n}{p}\right) \left(n-\frac{n}{p}-1\right)}{2} \\ &= \left(n-\frac{n}{p}\right) \left(n-\frac{n}{p}-1\right) \end{aligned}$$

### Kasus 3

Untuk  $\bar{u} \in P \setminus \{\bar{0}\}$  dan  $\bar{v} \notin P \setminus \{\bar{0}\}$ , dimana  $\bar{u}, \bar{v} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  dan  $u \neq v$  diperoleh pasangan  $(\bar{u}, \bar{v})$  sejumlah  $\left(\frac{n}{p} - 1\right) \left(n - \frac{n}{p}\right)$ .

$$W(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) = \sum_{\bar{u}, \bar{v} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))} d(\bar{u}, \bar{v}) = 1 \left(\frac{n}{p} - 1\right) \left(n - \frac{n}{p}\right) = \left(\frac{n}{p} - 1\right) \left(n - \frac{n}{p}\right)$$

Berdasarkan ketiga kasus di atas dan definisi 2 didapatkan indeks Wiener graf ideal prima dari gelanggang gelanggang bilangan bulat modulo atau  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  untuk  $n = p^k$  dimana  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 2$  adalah:

$$\begin{aligned} W(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) &= \sum_{\bar{u}, \bar{v} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))} d(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n}{p} - 1\right) \left(\frac{n}{p} - 2\right) + \left(n - \frac{n}{p}\right) \left(n - \frac{n}{p} - 1\right) + \left(\frac{n}{p} - 1\right) \left(n - \frac{n}{p}\right) \blacksquare \end{aligned}$$

### Teorema 6

Jika  $n = p^k$  dengan  $p$  bilangan prima dan suatu  $k \geq 2$ , maka indeks Harmonik graf ideal prima dari gelanggang  $\mathbb{Z}_n$  adalah

$$\frac{\left(\frac{n}{p} - 1\right) \left(\frac{n}{p} - 2\right)}{2(n-2)} + \frac{2 \left(\frac{n}{p} - 1\right) \left(n - \frac{n}{p}\right)}{n + \frac{n}{p} - 3}.$$

**Bukti:** Misalkan himpunan simpul graf ideal prima dari gelanggang bilangan bulat modulo  $V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) = \mathbb{Z}_{p^k} \setminus \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \dots, \overline{p^k - 1}\}$  untuk  $n = p^k$  dimana  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 2$  terdapat himpunan ideal prima tanpa  $\{\bar{0}\}$  yang juga bagian dari himpunan simpul  $V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  yaitu  $P \setminus \{\bar{0}\} = \{\bar{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, \dots, \overline{(p^{k-1} - 1)p}\}$ . Untuk membuktikan indeks Harmonik graf ideal prima dapat dibagi menjadi 2 kasus berdasarkan jumlah sisi yang bersisian dengan suatu simpul sebagai berikut.

### Kasus 1

Untuk  $\bar{u}, \bar{v} \in P \setminus \{\bar{0}\}$ , dimana  $\bar{u}, \bar{v} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  dan  $\bar{u} \neq \bar{v}$  diperoleh pasangan  $(\bar{u}, \bar{v})$  sejumlah kombinasi  $\binom{\frac{n}{p} - 1}{2}$ .

$$\begin{aligned}
H(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) &= \sum_{\bar{u}\bar{v} \in E(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))} \frac{2}{\deg(\bar{u}) + \deg(\bar{v})} = \frac{2}{(n-2) + (n-2)} \binom{\frac{n}{p}-1}{2} \\
&= \frac{1}{n-2} \frac{\left(\frac{n}{p}-1\right)!}{2! \left(\frac{n}{p}-3\right)!} = \frac{\left(\frac{n}{p}-1\right) \left(\frac{n}{p}-2\right)}{2(n-2)}
\end{aligned}$$

## Kasus 2

Untuk  $\bar{u} \in P \setminus \{\bar{0}\}$  dan  $\bar{v} \notin P \setminus \{\bar{0}\}$  dimana  $\bar{u}, \bar{v} \in V(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))$  dan  $u \neq v$  diperoleh pasangan  $(\bar{u}, \bar{v})$  sejumlah  $\left(\frac{n}{p}-1\right) \left(n - \frac{n}{p}\right)$

$$\begin{aligned}
H(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) &= \sum_{\bar{u}\bar{v} \in E(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))} \frac{2}{\deg(\bar{u}) + \deg(\bar{v})} = \frac{2}{(n-2) + \left(\frac{n}{p}-1\right)} \left(\frac{n}{p}-1\right) \left(n - \frac{n}{p}\right) \\
&= \frac{2 \left(\frac{n}{p}-1\right) \left(n - \frac{n}{p}\right)}{n + \frac{n}{p} - 3}
\end{aligned}$$

Berdasarkan kedua kasus di atas dan definisi 3 didapatkan indeks Harmonik graf ideal prima dari gelanggang bilangan bulat modulo atau  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  untuk  $n = p^k$  dimana  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 2$  adalah:

$$\begin{aligned}
H(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)) &= \sum_{\bar{u}\bar{v} \in E(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n))} \frac{2}{\deg(\bar{u}) + \deg(\bar{v})} \\
&= \frac{\left(\frac{n}{p}-1\right) \left(\frac{n}{p}-2\right)}{2(n-2)} + \frac{2 \left(\frac{n}{p}-1\right) \left(n - \frac{n}{p}\right)}{n + \frac{n}{p} - 3} \blacksquare
\end{aligned}$$

## KESIMPULAN

Adapun kesimpulan yang didapatkan dari penelitian ini antara lain:

1. Jika  $n = p^k$  untuk  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 1$  ideal prima tunggal gelanggang  $\mathbb{Z}_n$  adalah  $P = \langle \bar{p} \rangle$ .
2. Jika  $\mathbb{Z}_n$  gelanggang komutatif untuk  $n$  bilangan prima dengan ideal prima  $P = \langle \bar{p} \rangle = \{\bar{0}\}$  maka graf ideal prima  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  merupakan graf kosong berorde  $n - 1$ .



3. Jika  $\mathbb{Z}_n$  gelanggang komutatif dengan  $n = p^k$  dimana  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 2$  serta ideal prima  $P = \langle \bar{p} \rangle$ , maka graf ideal prima  $\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$  memiliki  $(p^k - p^{k-1})$  buah subgraf lengkap  $K_{(p^{k-1})}$  dan  $(p^{k-1} - 1)$  buah subgraf bintang  $K_{(1, p^{k-2})}$ .
4. Indeks Wiener dan indeks Harmonik graf ideal prima dari gelanggang bilangan bulat modulo  $(\mathbb{Z}_n)$  untuk suatu  $n = p^k$  dengan  $p$  bilangan prima dan  $k \geq 2$ , berturut-turut  $\frac{1}{2} \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( \frac{n}{p} - 2 \right) + \left( n - \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} - 2 \right) + \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} \right)$  dan  $\frac{2 \left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( \frac{n}{p} - 2 \right)}{2(n-2)} + \frac{\left( \frac{n}{p} - 1 \right) \left( n - \frac{n}{p} \right)}{n + \frac{n}{p} - 3}$ .

## UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih penulis ucapkan kepada dosen pembimbing yang memberikan arahan dan bimbingan dalam menyelesaikan artikel ini dan terimakasih kepada Gamatika dan Gamatika Reseach Club FMIPA Universitas Mataram yang menyediakan wadah bagi penulis dalam belajar riset dan kepenulisan.

## DAFTAR PUSTAKA

### Buku yang telah diterbitkan:

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P., 2016, *Graphs & Digraphs Sixth Edition*, CRC Press Taylor & Francis Group, London.

Munir, R., 2010, *Matematika Diskrit Edisi 3*, Informatika Bandung, Bandung.

Rasiman, Rubowo, M. R., dan Pramasdyahsari, A. S., 2018, *Teori Ring*, Univ. PGRI Semarang Press, Semarang.

Suryanti, S., 2017, *Teori Grup (Struktur Aljabar 1)*, UGM Press, Gresik.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., dan Hartanto, A. D., 2016, *Teori Ring dan Modul*, Gadjah Mada University Press, Yogyakarta.

### Jurnal:

Abdulqadr, F. H., 2020, *Maximal Ideal Graph of Commutative Rings*, Iraqi Journal of Science 61(8): 2070-2076.

Fatahillah, D. A. dan Switrayni, N. W., 2020, Sifat-Sifat Graf Pembagi Nol pada Gelanggang  $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1} \rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1} \rangle}$ , Eigen Mathematics Journal 03(01): 29-34.

Husni, M.N., Syafitri, H., Siboro, A.M., dkk., 2022, *The Harmonic Index And The Gutman Index of Coprime Graph of Integer Group Modulo With Order of Prime Power*, Journal of Mathematics and the Its Application 16(3):961-966.

Saeed, N., Long, K., Mufti, Z. S., dkk, 2021, *Degree-Based Topological Indices of Boron B<sub>12</sub>*, Hindawi Journal of Chemistry, vol 2021 :1-6 <https://doi.org/10.1155/2021/5563218>.

Salih, H. M. M. dan Jund, A. A., 2022, *Prime Ideal Graphs of Commutative Rings*, Indonesian Journal of Combinatorics 6(1): 42-49.

Zhong, L., 2012, *The Harmonic Index for Graphs*, Applied Mathematics Letters 25(3):561-566.

**Skripsi, tesis, dan disertasi:**

Aulia, S. A., 2021, Karakteristik Graf Non-Koprima dari Grup Dihedral  $D_{2n}$ , Skripsi, Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mataram, Mataram.

Nurhabibah, 2022, Graf Koprima Dari Grup *Generalized Quaternion Dan Numerical Invariants*-nya, Skripsi, Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mataram, Mataram.

Ramdani, D. S., 2022, Representasi Graf Irisan dari Grup Dihedral  $D_{2n}$  dan *Numerical Invariants*-nya, Skripsi, Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mataram, Mataram.

Schmuck, N. S., 2010, *The Wiener Index Of a Graph* , Thesis, Diplomstudium Technische Mathematik, Graz University of Technology, Graz.