

**ANALISIS DINAMIK
MODEL PREDATOR-PREY LESLIE-GOWER DENGAN OMNIVORA
MENGUNAKAN FUNGSI RESPONS HOLLING TIPE III**

***DYNAMIC ANALYSIS OF
THE LESLIE-GOWER PREDATOR-PREY MODEL WITH OMNIVORES USING
HOLLING TYPE III RESPONSE FUNCTION***

NINA HARNI DEWI^{1,✉}, MUHAMMAD RIJAL ALFIAN², SALWA³

^{1,2,3}Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram
Jl. Majapahit No.62, Gomong, Kec. Selaparang, Kota Mataram, Nusa Tenggara Bar. 83115.

✉email: ninaharnidewi25@gmail.com.

email: rjial_alfian@unram.ac.id.

Abstrak. Dalam artikel ini, kami membahas model *predator-prey* Leslie Gower dengan omnivora yang didefinisikan sebagai pemakan dari lebih dari satu rantai makanan menggunakan fungsi respons Holling tipe III yang mencakup interaksi antara *prey* dan omnivora, serta omnivora dan bangkai *predator*. Dengan variasi nilai-nilai parameter dalam model, kami mengamati kestabilan yang dihasilkan dari model tersebut. Berdasarkan hasil penelitian, beberapa parameter yang berpengaruh terhadap banyaknya titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibriumnya yaitu parameter r_2 yaitu laju pertumbuhan intrinsik *predator*, parameter m_3 yaitu koefisien interaksi pemangsaan bangkai *predator* oleh omnivora, c_3 yaitu Koefisien prediksi omnivora terhadap bangkai *predator*, k yaitu daya dukung lingkungan terhadap *predator*, dan parameter α, β , dan γ secara berturut-turut yaitu konstanta titik jenuh *prey* oleh omnivora, konstanta titik jenuh *prey* oleh *predator*, dan konstanta titik jenuh *predator* oleh omnivore. Perbedaan jumlah titik ekuilibrium dan stabilitas sistem dapat dipengaruhi oleh penentuan nilai parameter, yang artinya sistem akan mencapai kestabilan asimtotik lokal dalam kondisi tertentu, sehingga pemberian nilai parameter berperan penting dalam menentukan kestabilan sistem. Adapun simulasi numerik model diberikan untuk melihat stabilitas dari titik ekuilibriumnya.

Kata kunci: sistem dinamik, analisis kestabilan, stabil lokal, omnivora

Abstract. In this article, we discuss the Leslie Gower predator-prey model with an omnivore, defined as a creature that feeds on more than one trophic level, using the Holling Type III functional response. This functional response accounts for interactions between prey and omnivores, as well as between omnivores and predator carcasses. By varying the parameter values in the model, we observe the stability outcomes of the system. Based on our research, several parameters that influence the number of equilibrium points and the stability of these equilibrium points include; Parameter r_2 : The intrinsic growth rate of predators, parameter m_3 : The coefficient representing the interaction of omnivores feeding on predator carcasses, parameter c_3 : The coefficient representing the prediction of omnivores consuming predator carcasses, parameter k : The environmental carrying capacity for predators, and parameters α, β , and γ : Constants representing the saturation levels of prey by omnivores, prey by predators, and predators by omnivores, respectively. The difference in the number of equilibrium points and the stability of the system can be influenced by the specific values assigned to these parameters. In other words, the system reaches local asymptotic stability under certain conditions, highlighting the crucial role of parameter values in determining system stability. Additionally, numerical simulations of the model are provided to visualize the stability of equilibrium points.

Key words: dynamics system, stability analysis, local stability, omnivore.

PENDAHULUAN

Model predator-mangsa adalah model yang menjelaskan interaksi antara dua atau lebih spesies, terdiri dari mangsa dan pemangsa (Pathuddin, 2021). Pada tahun 1948, Leslie dan Gower memperkenalkan model dengan populasi *predator* tumbuh mengikuti model logistik sehingga pertumbuhannya terbatas. Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas (Molles, 2002). Selain itu, laju pertumbuhan *predator* sebanding dengan banyaknya populasi *prey* (Mondal, 2018).

Pada kenyataannya interaksi antar *predator* dan *prey* tidak hanya terjadi dalam dua spesies saja, tetapi mungkin saja melibatkan omnivora sebagai spesies ketiga. Beberapa penelitian yang membahas mengenai model *predator-prey* dengan spesies ketiga yaitu omnivora, diantaranya Previte and Hoffman (2010), yang membuat model dimana spesies omnivora dapat menjadi *predator* yang akan memangsa spesies bangkai *predator* dan spesies *prey* tetapi tidak akan menghambat langsung populasi dari *predator*, kemudian pada tahun 2018, Exviani dkk. memodifikasi model Leslie-Gower dengan omnivora yang sebelumnya dibangun oleh Previte dan Hoffman. Mereka menambahkan karakteristik pemangsa yang cenderung mencari sumber makanan alternatif ketika mangsanya utama mulai menurun, dan Majeed dkk (2019), mengembangkan model yang menggabungkan jeda waktu bagi pemangsa dan omnivora untuk mencari dan mengkonsumsi mangsanya, dengan menggunakan fungsi respons tipe II Holling dalam penelitian mereka.

Fungsi respons menggambarkan laju konsumsi *prey* oleh *predator*. Di dalam dinamika populasi, Holling mengusulkan bahwa terdapat tiga jenis fungsi respons, yaitu Holling tipe I, Holling tipe II, dan Holling tipe III (Mortoja, dkk. 2018). Menurut Ruan dan Xiao (2001), Monod dan Haldane menambahkan satu fungsi respons hasil penelitiannya. Fungsi respons ini dikenal sebagai fungsi respons Holling tipe IV.

Keempat fungsi respons tersebut digunakan dalam keadaan yang berbeda. Pada penelitian ini, akan digunakan fungsi respons Holling tipe III karena diasumsikan *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain ketika populasi *prey* yang dimakan mulai berkurang. Bentuk fungsinya $F^{(III)}(x) = \frac{ax^2}{1+bx^2}$ yang dikenal sebagai fungsi respons Holling tipe III, dimana a tingkat konsumsi maksimum *predator* terhadap *prey*, b menyatakan tingkat kejenuhan pemangsaan, dan x menyatakan jumlah populasi *prey* (Nam dan Kaseem, 2009). Fungsi respons tipe Holling III ini telah memperhitungkan waktu untuk memproses makanan pada saat *predator* mengkonsumsi makanannya. Hal ini ditandai dengan melambatnya tingkat serangan yang dilakukan *predator* terhadap *prey*. Melambatnya tingkat serangan karena pencarian makanan dan proses memakan merupakan dua perilaku yang saling eksklusif (Wijayanti dan Kharis, 2015).

Dengan menggunakan asumsi yang sama, yaitu pemangsa yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain ketika populasi *prey* yang dimakan mulai berkurang, maka dikonstruksi kembali model Leslie-Gower yang telah dikonstruksi oleh Exviani, dkk. (2018) yaitu dengan menambahkan fungsi respons Holling tipe III. Analisis dinamik

dilakukan untuk menentukan titik ekuilibrium dan menganalisis kestabilan dari titik ekuilibriumnya

MATERI DAN METODE

Lokasi Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada bulan Februari 2023 sampai dengan Juli 2023 di Laboratorium Matematika Terapan Fakultas MIPA Universitas, Mataram.

Prosedur Kerja

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu studi literatur. Studi literatur digunakan untuk menghimpun dan mengkaji data dari berbagai sumber pustaka yang berkaitan dengan masalah yang akan diteliti. Hasil dari studi literatur yang dilakukan selanjutnya digunakan sebagai bahan dasar pengembangan dan landasan untuk menganalisis dan memecahkan permasalahan yang diangkat. Berikut adalah prosedur penelitian:

1. Studi literatur

Bagian ini diawali dengan mengkaji dari artikel dan jurnal penelitian terdahulu terkait model predator-prey Leslie-Gower baik yang melibatkan dua spesies maupun tiga spesies dengan adanya fungsi respon Holling.

2. Perumusan masalah

Tujuan dari perumusan masalah adalah memperempit ruang masalah yang akan dipecahkan sehingga akan lebih memudahkan dalam pemecahan masalah. Berdasarkan ide yang diperoleh setelah identifikasi masalah, selanjutnya akan digunakan dalam melakukan kontruksi model.

3. Mengontruksi Model *predator-prey* Leslie-Gower dengan Omnivora dan Fungsi Respons Holling

Pengontruksian model dilakukan dengan mengikuti permasalahan yang disajikan dalam jurnal Exviani, dkk. (2018). Berdasarkan model yang didapatkan kemudian dimodifikasi yaitu dengan menambahkan fungsi respons Holling tipe III kedalam model tersebut.

4. Menentukan titik ekuilibrium

Penentuan titik kesetimbangan dilakukan dengan mencari titik kesetimbangan pada sistem sehingga dapat diketahui keadaan predator, prey dan omnivora dalam sistem.

5. Menganalisis kestabilan model

Untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium, terlebih dahulu perlu dilakukan pelinearisasian dilanjutkan dengan menentukan nilai eigennya.

Untuk melinearisasikan sistem nonlinear dalam dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian.

$$Jf = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

6. Mensimulasi sistem

Simulasi numerik digunakan untuk melihat kestabilan dari populasi apakah menuju ke salah satu titik ekuilibrium.

7. Kesimpulan

Menarik kesimpulan adalah tahap terakhir dari penelitian. Memuat kesimpulan dari model berdasarkan hasil dari analisis dan simulasi yang diperoleh.

HASIL DAN DISKUSI

Hasil

Dalam penyusunan model, dibahas pertumbuhan populasi antara tiga spesies yang terdiri dari *prey* (x), *predator* (y) yang akan memangsa *prey* (x), dan omnivora (z) yang akan memangsa *prey* (x) dan bangkai *predator* (y). Pada penelitian ini diasumsikan bahwa tidak ada interaksi yang terjadi antara *predator* dan omnivora dalam memangsa *prey*, artinya *predator* dan omnivora dianggap tidak bertemu satu sama lain ketika memangsa *prey*.

Model utama *predator-prey* dan omnivora yang digunakan yaitu model yang didapatkan dari penelitian Exviani, dkk (2018) yaitu model *predator-prey* Leslie-Gower dengan omnivora.

$$\frac{dx}{dt} = x(r_1 - b_1x - b_2y - b_3z)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(r_2 - \frac{a_2}{x+k}y) \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = z(-c_1 + c_2x + c_3y - c_4z)$$

Selanjutnya, model ini akan dimodifikasi dengan menambahkan fungsi respons Holling tipe III ke dalam model tersebut.

Dinamika populasi mangsa diasumsikan mengikuti model *predator-prey* Leslie-Gower, yang dipengaruhi oleh tiga faktor: faktor pertumbuhan alami mangsa, faktor predasi akibat interaksi dengan predator dan omnivora, dan faktor kematian akibat interaksi dengan mangsa lain. Dinamika populasi *predator* mengikuti bentuk modifikasi dari model *predator-prey* Leslie-Gower, dengan asumsi bahwa kapasitas bawaan, yang membatasi pertumbuhan *predator*, dipengaruhi oleh jumlah populasi mangsa. Dinamika populasi omnivora diasumsikan mengikuti model predator-mangsa dengan omnivora yang diperkenalkan oleh Previte-Hoffman (2013), yang dipengaruhi oleh empat faktor:

faktor kematian alami omnivora, faktor predasi terhadap populasi mangsa, faktor predasi terhadap bangkai *predator*, dan faktor kematian akibat interaksi dengan omnivora lainnya. Kemudian, dengan memodifikasi fungsi respons tipe III Holling ke dalam model yang mencakup interaksi antara *predator* dan mangsa serta omnivora dan mangsa. Oleh karena itu, model ini dirumuskan dalam sistem persamaan berikut (2):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\left(r_1 - b_1x - \frac{m_1yx}{\beta + x^2} - \frac{m_2zx}{\gamma + x^2}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= y\left(r_2 - \frac{a_2}{x+k}y\right) \\ \frac{dz}{dt} &= z\left(-c_1 + \frac{c_2m_2x^2}{\gamma + x^2} + \frac{c_3m_3y^2}{\alpha + y^2} - c_4z\right)\end{aligned}\tag{2}$$

Semua parameter memiliki nilai positif. Parameter r_1 dan r_2 masing-masing menunjukkan pertumbuhan intrinsik mangsa dan predator, b_1 adalah koefisien kompetisi antara mangsa, a_2 adalah parameter interaksi antara predator, m_1, m_2 , dan m_3 masing-masing adalah koefisien interaksi antara predator dan mangsa, koefisien interaksi antara omnivora dan mangsa, dan koefisien interaksi antara predator dan omnivora, k adalah parameter perlindungan terhadap predator, c_1 adalah kematian alami omnivora, c_2 dan c_3 masing-masing adalah koefisien prediksi omnivora terhadap mangsa dan koefisien prediksi omnivora terhadap bangkai predator, c_4 adalah kompetisi antara populasi omnivora, dan α, β , dan γ masing-masing adalah konstanta titik jenuh predator oleh omnivora, konstanta titik jenuh mangsa oleh predator, dan konstanta titik jenuh mangsa oleh omnivora. Sementara itu, bentuk dari $\frac{a_2}{x+k}y$ dapat diinterpretasikan sebagai kelangkaan mangsa mungkin merangsang predator untuk mencari sumber makanan alternatif. Semua parameter dan nilai-nilai parameter dapat dilihat dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Variabel dan nilai parameter

Simbol	Parameter	Nilai Parameter			
		Percobaan I	Percobaan II	Percobaan III	Percobaan IV
$x(t)$	Banyaknya populasi <i>prey</i> pada saat t	—	—	—	—
$y(t)$	Banyaknya populasi <i>predator</i> pada saat t	—	—	—	—
$z(t)$	Banyaknya populasi omnivora pada saat t	—	—	—	—
α	Konstanta titik jenuh <i>predator</i> oleh omnivora	0,25	0,23	0,25	0,23
β	Konstanta titik jenuh <i>prey</i> oleh <i>predator</i>	0,25	0,23	0,25	0,23
γ	Konstanta titik jenuh <i>prey</i> oleh omnivora	0,25	0,23	0,25	0,23
k	Daya dukung lingkungan terhadap <i>predator</i>	0,3	0,3	0,3	0,5

r_1	Laju pertumbuhan intrinsik <i>prey</i>	0,5	0,5	0,5	0,5
r_2	Laju pertumbuhan intrinsik <i>predator</i>	0,7	0,7	0,7	0,9
a_2	Koefisien interaksi antar <i>predator</i>	0,2	0,2	0,2	0,2
b_1	Koefisien dari kompetisi antar <i>prey</i>	0,05	0,05	0,05	0,05
c_1	Kematian alami omnivora	0,9	0,9	0,3	0,3
c_2	Koefisien prediksi omnivora terhadap <i>prey</i>	0,25	0,25	0,25	0,25
c_3	Koefisien prediksi omnivora terhadap bangkai <i>predator</i>	0,2	0,2	0,4	0,4
c_4	Koefisien dari kompetisi antar <i>predator</i>	0,2	0,2	0,2	0,2
m_1	Koefisien interaksi antar pemangsa <i>prey</i> oleh <i>predator</i>	0,7	0,7	0,7	0,7
m_2	Koefisien interaksi pemangsa <i>prey</i> oleh omnivore	0,9	0,9	0,9	0,9
m_3	Interaksi pemangsa bangkai <i>predator</i> oleh omnivora	0,6	0,6	0,9	0,9

Kestabilan Titik Ekuilibrium

Dalam bagian ini, dilakukan percobaan I II, III, dan IV untuk menganalisis pengaruh parameter-parameter pada Tabel 1 terhadap sistem (2), yang ditunjukkan oleh definisi berikut.

Definisi 1 (Perko, 2001)

Titik $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium atau titik kritis dari sistem $\dot{x} = f(x)$ jika $f(x) = 0$.

Menurut definisi 1, titik kesetimbangan dari sistem (2) diperoleh ketika

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

ketika

$$x \left(r_1 - b_1 x - \frac{m_1 y x}{\beta + x^2} - \frac{m_2 z x}{\gamma + x^2} \right) = 0$$

$$y \left(r_2 - \frac{a_2}{x + k} y \right) = 0 \quad (3)$$

$$z \left(-c_1 + \frac{c_2 m_2 x^2}{\gamma + x^2} + \frac{c_3 m_3 y^2}{\alpha + y^2} - c_4 z \right) = 0$$

Dari sistem (3), dilakukan analisis numerik menggunakan nilai-nilai parameter dalam Tabel 1 untuk mendapatkan sebuah titik kesetimbangan.

Sistem persamaan diferensial model *predator-prey* Leslie Gower dengan omnivora menggunakan fungsi respons Holling tipe III adalah sistem persamaan diferensial nonlinear. Oleh karena itu, diperlukan linearisasi untuk menganalisis stabilitas titik-titik

kesetimbangan model tersebut. Untuk melinearisasikan sistem persamaan diferensial nonlinear dapat dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian seperti yang dijelaskan dalam teorema 1 dibawah ini.

Teorema 1 (Perko, 2001)

Jika $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ terdiferensial di X_0 maka turunan parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$,

$i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, di X_0 ada untuk semua $X \in \mathbb{R}^n$ dan

$$Df(X_0)X = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)x_j \tag{4}$$

Jadi, jika f adalah sebuah fungsi yang dapat di-diferensialkan, turunan Df diberikan oleh matriks Jacobian $n \times n$.

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

Sistem (2) dianalisis untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dengan metode linearisasi menggunakan matriks Jacobian dengan nilai variabel dan parameter dalam Tabel 1. Matriks Jacobian yang dapat digunakan untuk melineariskan sistem (2) untuk model dengan tiga variabel adalah matriks Jacobian berukuran 3×3 .

Berdasarkan sistem (2), matriks Jacobian (Df) diperoleh sebagai berikut.

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

dimana

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = r_1 - 2b_1x + \frac{2m_1x^3y}{(x^2+\beta)^2} + \frac{2m_2x^3z}{(x^2+\gamma)^2} - \frac{2m_1xy}{x^2+\beta} - \frac{2m_1xz}{x^2+\gamma}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{m_1x^2}{x^2+\beta}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -\frac{m_2x^2}{x^2+\gamma}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{a_2y^2}{(k+x)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = r_2 - \frac{2a_2y}{k+x}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{2c_2m_2xz}{x^2+\gamma} - \frac{2c_2m_2x^3z}{(x^2+\gamma)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{2c_3m_3yz}{y^2+\alpha} - \frac{2c_3m_3x^3z}{(y^2+\alpha)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{c_3m_3y^2}{y^2+\alpha} - 2c_4z - c_1 + \frac{c_2m_2x^2}{x^2+\gamma}$$

Berdasarkan matriks Jacobian (Df) di atas, kita menyelidiki stabilitas lokal dari setiap titik kesetimbangan dengan mengacu pada Tabel 2 di bawah ini dan teorema berikut. Beberapa sifat stabilitas dari sistem linear adalah sebagai berikut (Boyce dan DiPrima, 2012).

Tabel 2. Stabilitas sistem linear

Nilai Eigen	Tipe Titik Ekuilibrium	Stabilitas
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Node	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Node	Stabil asimptotik
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik Saddle	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Node sejati atau tidak sejati	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Node sejati atau tidak sejati	Stabil asimptotik
$\lambda_1, \lambda_2 = k \mp ih$	Titik Spiral	
$k > 0$		Tidak stabil
$k < 0$		Stabil asimptotik
$\lambda_1 = ih, \lambda_2 = -ih$	Titik Tengah	Tidak stabil

Definisi 2 (Olsder, dkk. 2011)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$, penyelesaian dengan keadaan awal $x(0) = x_0$ dinotasikan oleh $x(t, x_0)$.

- 1) Suatu vektor x^* yang $f(x^*) = 0$ disebut sebagai titik ekuilibrium.
- 2) Suatu titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga bila $\|x_{t_\delta} - x^*\| < \delta$ maka $\|x(t, x_{t_\delta}) - x^*\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.
- 3) Suatu titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil asimtotik bila titik \bar{x} stabil dan ada $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_{t_\delta}) - x^*\| = 0$ untuk semua x_0 yang memenuhi $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$.
- 4) Suatu titik ekuilibrium dikatakan tak stabil jika tidak memenuhi definisi stabil.

Tabel 3. Kestabilan Titik Ekuilibrium Percobaan I

Titik Ekuilibrium	Nilai Eigen			Stabilitas
	λ_1	λ_2	λ_3	
$T_1 = (0; 0; 0)$	-0.9	0.5	0.7	Tidak Stabil
$T_2 = (10, 0; 0; 0)$	-0.676	-0.5	0.7	Tidak Stabil
$T_3 = (0; 1,05; 0)$	-0.802	-0.7	0.5	Tidak Stabil
$T_4 = (0,13; 1,49; 0)$	-0.571	-0.571	-0,779	Stabil Asimtotik
	- 0.292i	+ 0.292i		

Tabel 4. Kestabilan Titik Ekuilibrium Percobaan II

Titik Ekuilibrium	Nilai Eigen			Stabilitas
	λ_1	λ_2	λ_3	
$T_1 = (0; 0; 0)$	-0.9	0.5	0.7	Tidak Stabil

$T_2 = (10,0; 0; 0)$	-0,75	-0.5	0.7	Tidak Stabil
$T_3 = (0; 1,049; 0)$	-0,768	-0,699	0.5	Tidak Stabil
$T_4 = (0,095; 1,383; 0)$	-0,581 $\pm 0,263i$	-0,581 $\pm 0,263i$	-0,752	Stabil Asimtotik

Tabel 5. Kestabilan Titik Ekuilibrium Percobaan III

Titik Ekuilibrium	Nilai Eigen			Stabilitas
	λ_1	λ_2	λ_3	
$T_1 = (0; 0; 0)$	-0,3	0.5	0.7	Tidak Stabil
$T_2 = (10; 0; 0)$	-0,076	-0.5	0.7	Tidak Stabil
$T_3 = (0; 1,05; 0)$	-0,007	-0.7	0.5	Tidak Stabil
$T_4 = (0,126; 1,49; 0)$	$-0,57 \pm 0,292i$	$-0,57 \pm 0,292i$	0,037	Tidak Stabil
$T_5 = (0,112; 1,443; 0,161)$	$-0,57 \pm 0,292i$	$-0,57 \pm 0,292i$	-0,037	Stabil Asimtotik

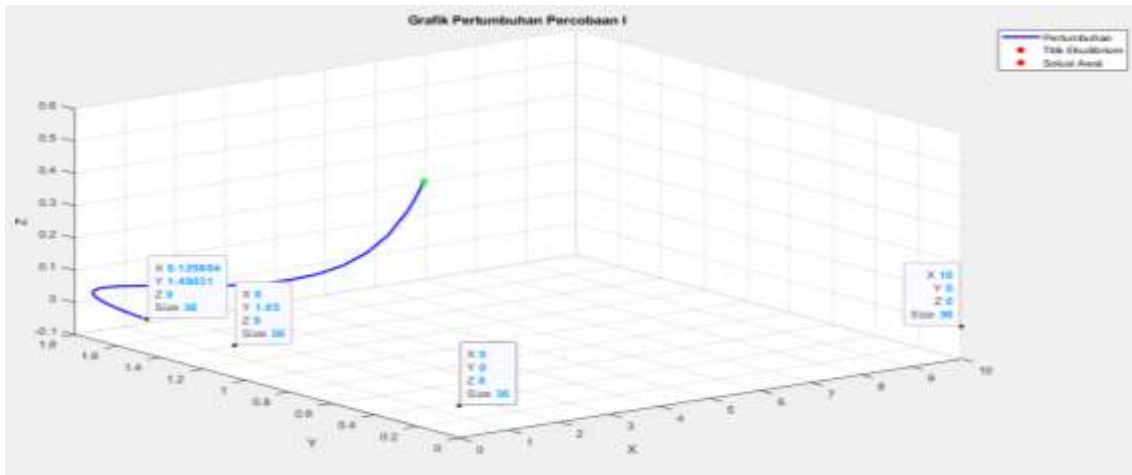
Tabel 6. Kestabilan Titik Ekuilibrium Percobaan IV

Titik Ekuilibrium	Nilai Eigen			Stabilitas
	λ_1	λ_2	λ_3	
$T_1 = (0; 0; 0)$	-0,3	0.5	0,9	Tidak Stabil
$T_2 = (10,0; 0; 0)$	-0,076	-0.5	0,9	Tidak Stabil
$T_3 = (0; 2,25; 0)$	0,081	0,5	-0,9	Tidak Stabil
$T_4 = (0; 2,25; 0,406)$	-0,9	0,5	-0,081	Tidak Stabil
$T_5 = (0,07; 2,567; 0)$	$-0,69 \pm 0,106i$	$-0,69 \pm 0,106i$	0,09	Tidak Stabil

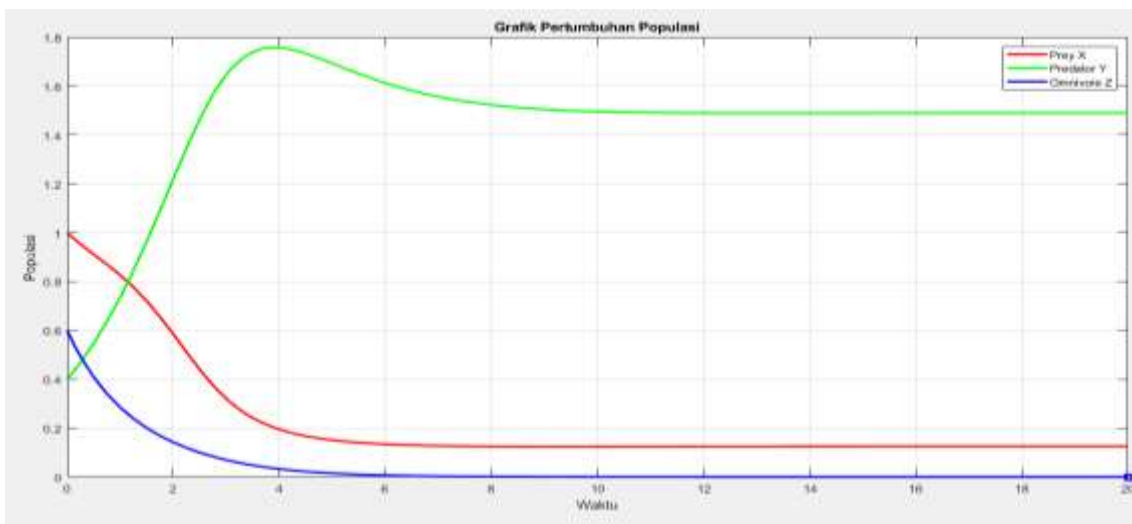
Berdasarkan hasil percobaan diatas dengan empat nilai parameter yang berbeda menunjukkan bahwa pada titik ekuilibrium $T_4 = (0,126; 1,49; 0)$ pada percobaan I dan $T_4 = (0,095; 1,383; 0)$ pada percobaan II menunjukkan stabil asimtotik lokal dengan keadaan yang sama yaitu ketika populasi dari omnivoranya mengalami kepunahan. Kemudian pada percobaan III $T_5 = (0,112; 1,443; 0,161)$ menunjukkan stabil asimtotik lokal dengan keadaan ketiga populasinya dapat hidup berdampingan, dan pada IV menunjukkan semua titik ekuilibriumnya tidak stabil sehingga dapat dikatakan bahwa pemilihan nilai parameter dapat mempengaruhi stabilitas dari titik ekuilibrium pada sistem persamaan (5.5). Hal ini juga telah dibuktikan pada penelitian yang dilakukan oleh Hattamurrahman, dkk (2022) bahwa dengan memvariasikan nilai parameternya kestabilan dari sistem dapat berubah.

Simulasi Numerik

Dalam diskusi ini, simulasi numerik dilakukan untuk mengamati dinamika sistem (2) dengan menggunakan nilai-nilai parameter yang tercantum dalam Tabel 1 percobaan I.

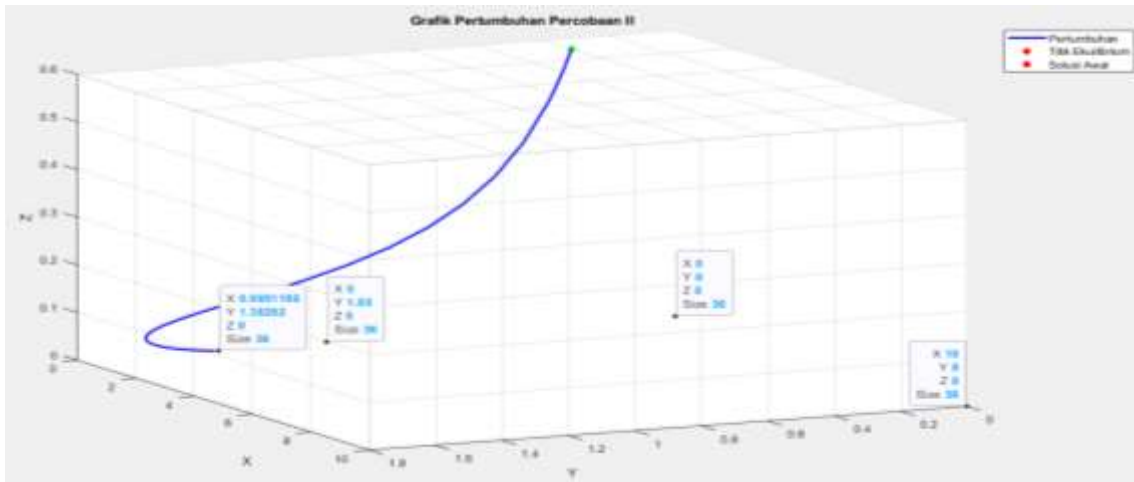


Gambar 1 Solusi sistem (2) pada percobaan I dengan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 0,4$, dan $z(0) = 0,6$

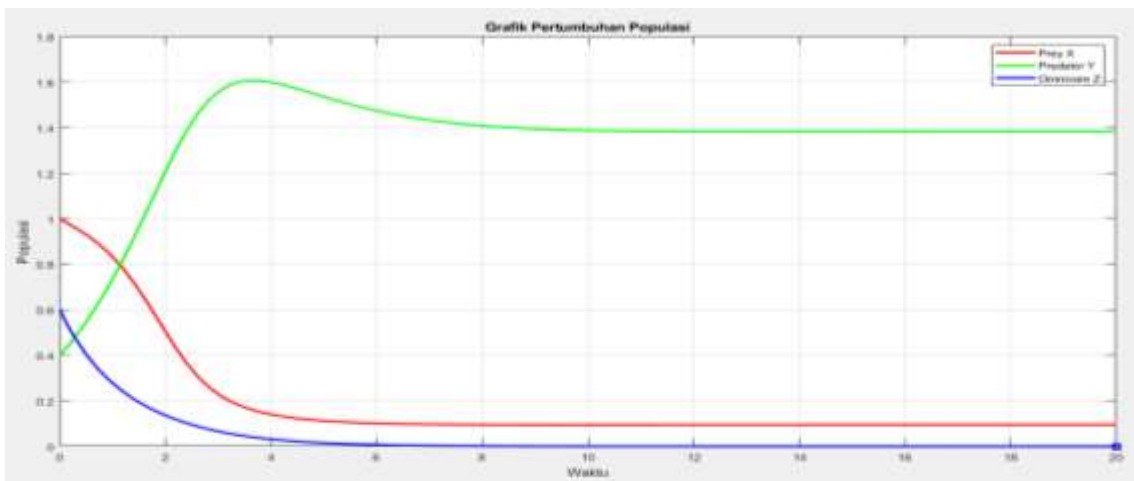


Gambar 2 Kurva populasi *prey*, *predator*, dan *omnivora* pada percobaan I dengan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 0,4$, dan $z(0) = 0,6$

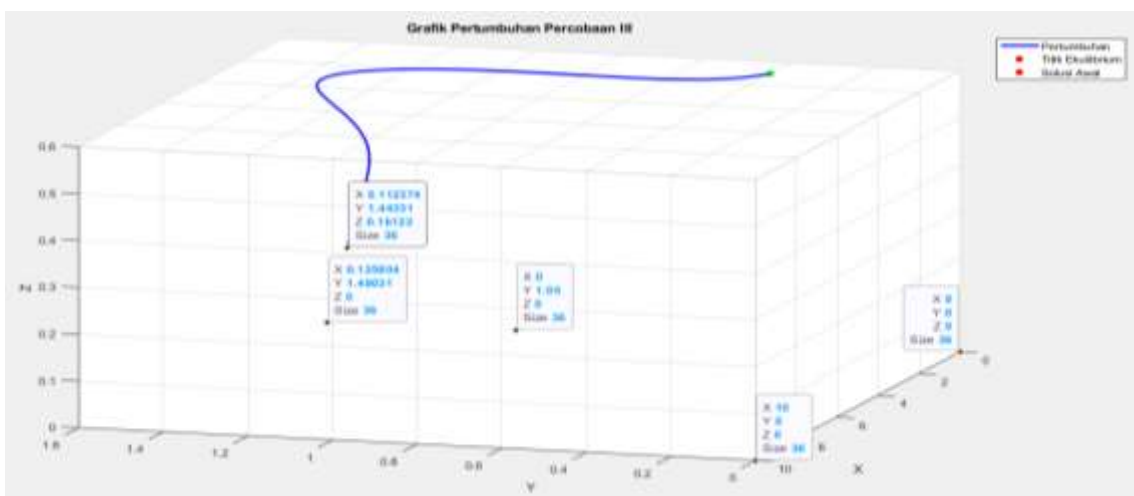
Simulasi yang ditunjukkan dalam Gambar 1 dan 2 menggambarkan populasi prey, predator, dan omnivora dengan nilai awal *prey* $x(0) = 1$, *predator* $y(0) = 0,4$, dan omnivora $z(0) = 0,6$. Gambar 1 menampilkan semua titik ekuilibrium yang ada, dan solusi sistem secara perlahan mendekati salah satu titik ekuilibrium, yaitu titik $T_4 = (0,1258; 1,49; 0)$, yang menunjukkan stabil asimtotik lokal. Gambar 2, dengan nilai awal populasi *prey* $x(0) = 1$, menunjukkan penurunan kontinu dalam populasi prey. Ini terjadi karena populasi prey menjadi mangsa bagi predator dan omnivora, akhirnya stabil pada titik 0,1258. Selanjutnya, populasi predator, yang dimulai dari nilai awal $y(0) = 0,4$, terus meningkat sampai batas tertentu sebelum mengalami penurunan. Akhirnya, populasi predator stabil pada titik 1,49. Terakhir, populasi omnivora, yang dimulai dari nilai awal $z(0) = 0,6$, terus menurun sampai punah.



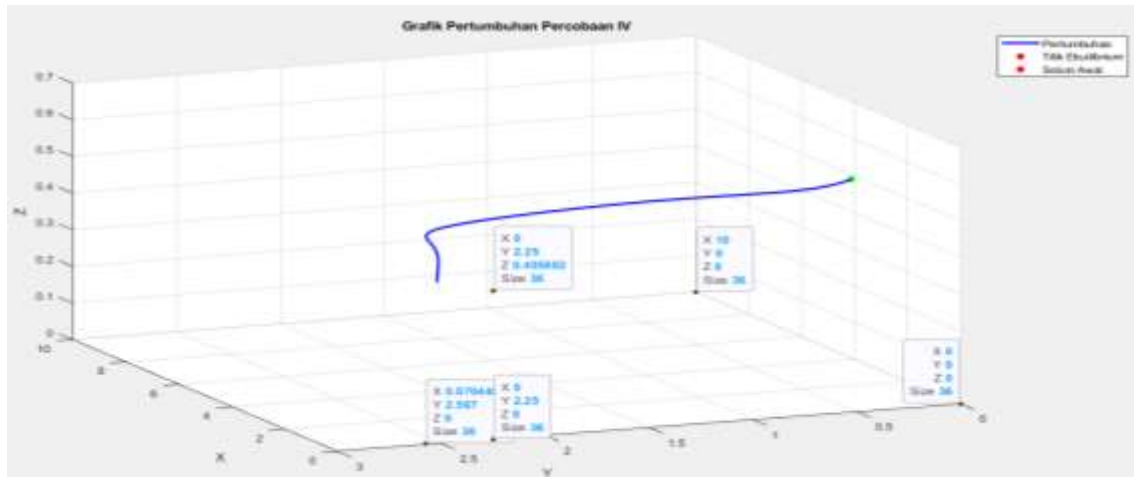
Gambar 3 Solusi sistem (2) pada percobaan II dengan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 0,4$, dan $z(0) = 0,6$



Gambar 4 Kurva populasi *prey*, *predator*, dan omnivora pada percobaan II dengan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 0,4$, dan $z(0) = 0,6$



Gambar 5 Solusi sistem (2) pada percobaan III dengan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 0,4$, dan $z(0) = 0,6$



Gambar 6 Solusi sistem (2) pada percobaan IV dengan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 0,4$, dan $z(0) = 0,6$

Gambar 5.7 menunjukkan semua titik ekuilibriumnya *exist* dan solusi sistem terlihat mendekati salah satu titik ekuilibrium yaitu pada $T_4 = (0; 2,25; 0,406)$ yang mana nilai eigen dari T_4 adalah $\lambda_1 = -0,9, \lambda_2 = 0,5$, dan $\lambda_3 = -0,081$ kemudian bergerak menjauh dari titik ekuilibrium tersebut sehingga sistem (5.6) dengan nilai parameter pada percobaan IV dapat dikatakan tidak stabil.

KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian ini, dilakukan empat kali percobaan pada model *predator-prey* Leslie-Gower dengan omnivora menggunakan fungsi respon Holling tipe III (2) untuk melihat kestabilan yang dihasilkan dari model tersebut berdasarkan nilai parameter pada Tabel 5.2. Pada percobaan I didapatkan 4 titik ekuilibrium dimana sistem stabil asimtotik lokal pada T_4 yaitu saat populasi omnivoranya punah. Pada percobaan II dengan menurunkan nilai parameter α, β , dan γ , ternyata tidak mengubah stabilitas dari sistem, namun pada percobaan III apabila koefisien m_3 ditingkatkan yang mana akan berdampak pada peningkatan c_3 dan penurunan koefisien dari c_1 , didapatkan 5 titik ekuilibrium dimana sistem stabil asimtotik lokal pada T_5 yaitu ketiga populasinya dapat hidup berdampingan. Selanjutnya pada percobaan IV jika koefisien r_2 dan k ditingkatkan mengakibatkan sistem selalu berada dalam kondisi tidak stabil di kelima titik ekuilibriumnya. Dari keempat percobaan yaitu percobaan I, II, III, dan IV, percobaan I dan II memperoleh 4 titik ekuilibrium dengan sistem persamaan (2) akan stabil asimtotik lokal ketika populasi omnivoranya mengalami kepunahan yaitu berada pada titik ekuilibrium $T_4 = (0,1258; 1,49; 0)$ untuk percobaan I dan $T_4 = (0,095; 1,383; 0)$ untuk percobaan II, kemudian pada percobaan III $T_5 = (0,112; 1,443; 0,161)$ menunjukkan stabil asimtotik lokal dengan keadaan ketiga populasinya dapat hidup berdampingan, dan percobaan IV semua titik ekuilibriumnya dalam keadaan tidak stabil. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Tabel 5.3 sampai dengan Tabel 5.6. Melalui simulasi numerik, dapat dilihat perbedaan dalam pemberian nilai parameter dapat mempengaruhi kestabilan dari model.

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih kepada dosen pembimbing saya, Bapak Muhammad Rijal Alfian dan Ibu Salwa yang dengan sabar memberikan saya masukan dan dukungan sehingga penelitian ini dapat saya selesaikan, terimakasih juga untuk kedua orang tua saya yang sudah menjadi menyemangat saya, dan kepada teman-teman saya, terimakasih sudah berjuang bersama dalam mengerjakan penelitian kita.

DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W.E., dan DiPrima, R.C., 2012, Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem Ten Edition, John Wiley & Son, Inc., New York.
- Exviani, R., Kusumawinahyu, W.M., dan Hidayat, N., 2018, Dynamical Analysis of Predator-Prey Model Leslie-Gower with Omnivore, Journal of Experimental Life Science 8(2): 126-132.
- Majeed, S.J., N R.K., dan Thirthar, A.A., 2019, The Dynamics of an Omnivore- Predator-Prey Model with Harvesting and two Different Nonlinear Functional Responses, AIP Conference Proceeding 2096(1), 020008-1-020008-11, DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5097805>.
- Molles, M. C., 2002, Ecology Concept and Applications Second Edition, Mc Graw Hill, Mexico City.
- Mondal, A., Pal, A.K., dan Samanta, G.P., 2018, On the dynamics of evolutionary Leslie-Gower predator-prey eco-epidemiological model with disease in predator, Journal of Ecological Genetics and Genomics 10, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.egg.2018.11.002>.
- Mortoja, S.G., Panja, P., dan Mondal, S.K., 2017, Dynamics of a predator-prey model with stage-structure on both species and anti-predator behavior, Journal of Informatics in Medicine Unlocked 10: 50-57.
- Olsder, G.J., Woude, V. D., Maks, J.G., dan Jeltsema, D., 2011, Mathematical Systems Theory Fourth Edition, Delft University of Technology, Delft.
- Pathuddin, H., 2021, Analisis Kestabilan Model Predator Prey pada Tanaman Bambu dan Giant Panda, Jurnal of MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya) 8(2): 36-41, DOI: <https://doi.org/10.24252/msa.v8i2.14546>.
- Perko, L., 2001, Differential Equations and Dynamical Systems. Third Edition, Springer, Verlag.
- Previte, J.P., dan Hoffman, K.A., 2013, Period Doubling Cascades in a Predator- Prey Model with a Scavenger, Journal of Society for Industrial and Applied Mathematics 55(3): 523-546, DOI: 10.1137/110825911.
- Ruan, S., dan Xiao, D. 2001. Global Analysis in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response. SIAM J. Appl. Math. 61(4): 1445–1472.
- Wijayanti, P., dan Kharis, M., 2015, Analisis Model Predator-prey Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe III, Journal of Unnes Journal of Mathematics 4(1): 38-46, DOI: <https://doi.org/10.15294/ujm.v4i1.7417>.