

# KONSTRUKSI FUNGSI LYAPUNOV PADA MODEL EPIDEMIK SIR PENYAKIT TUBERKULOSIS UNTUK MENENTUKAN KESTABILAN TITIK EKUILIBRIUM

Nabila Medianti Putri, Marwan, Muhammad Rijal Alfian, Bulqis Nebulla Syechah

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram

e-mail: nabilaputri2721@gmail.com

---

## Keywords:

Fungsi Lyapunov  
Metode Variabel Gradien  
Metode Krasovskii

**Abstrak:** Fungsi Lyapunov adalah salah satu fungsi yang dikonstruksi untuk memeriksa kestabilan global dari suatu sistem nonlinear. Fungsi Lyapunov tidak terbatas pada sistem linear, sehingga dapat digunakan dalam analisis sistem dinamis nonlinear yang lebih kompleks. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan bentuk fungsi Lyapunov, lalu dianalisis kestabilannya. Pada penelitian ini digunakan metode variabel gradien dan Krasovskii dalam mengonstruksi fungsi Lyapunov. Berdasarkan hasil perhitungan dan simulasi yang dilakukan, diperoleh kandidat fungsi Lyapunov untuk sistem epidemik SIR penyakit tuberkulosis menggunakan metode variabel gradien pada semua titik kesetimbangannya. Fungsi Lyapunov dapat dikonstruksi dengan menggunakan metode variabel gradien pada titik  $E_0$  yaitu  $V(S, I, R) = \frac{1}{2}((S - S^0)^2 + I^2 + R^2) + (S - S^0)I + (S - S^0)R + IR$  dan pada titik  $E_1$  yaitu  $V(S, I, R) = \frac{1}{2}((S - S^*)^2 + (I - I^*)^2 + (R - R^*)^2) + (S - S^*)(I - I^*) + (S - S^*)(R - R^*) + (I - I^*)(R - R^*)$ . Sedangkan metode Krasovskii menghasilkan fungsi Lyapunov,  $V(S, I, R) = 33,7838 \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right)^2 - 2(0,0519) \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) + 33,5533 \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right)^2 + 2(33,5440) \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) (cI - \mu R) + 33,7838(cI - \mu R)^2$ , untuk salah satu titik kesetimbangannya yaitu titik  $E_0$ . Didapatkan hasil yang stabil asimtotik secara global menggunakan metode variabel gradien pada saat titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  dan endemik  $E_1$ . Sedangkan dengan menggunakan metode Krasovskii diperoleh stabil asimtotik hanya di salah satu titik kesetimbangan yaitu saat bebas penyakit  $E_0$ .

## PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu yang dapat diterapkan dalam berbagai ilmu pengetahuan dan dapat memberikan interpretasi solusi analitis yang lebih rinci. Salah satu contoh permasalahan yang muncul dalam kehidupan sehari-hari ialah yang berkaitan dengan sistem dinamik. Sistem dinamik adalah sistem persamaan yang dipengaruhi oleh perubahan gerak dan waktu. Salah satu kajian yang paling penting dari masalah sistem dinamik adalah bagaimana keadaan kestabilan sistem tersebut. Dalam sistem dinamik salah satu contoh yang dapat kita jumpai adalah tentang model epidemik penyebaran penyakit.

Model epidemik merupakan model yang mempelajari keterkaitan individu-individu dalam suatu populasi, terutama dalam proses berkembangnya wabah penyakit dalam suatu kawasan. Kermack & Mc Kendrick pertama kali mengusulkan model penularan penyakit pada tahun 1927, yaitu model epidemik *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR). Model ini dikembangkan untuk menggambarkan secara deterministik sifat penyebaran penyakit menurut sistem persamaan diferensial nonlinear.

Pada umumnya model ini diterapkan pada proses penyebaran penyakit, seperti influenza, tuberkulosis, HIV, demam berdarah, dan lain-lain. Adapun salah satu contohnya yaitu pada penelitian Mustianah (2019) yang membahas tentang penyebaran penyakit Tuberkulosis. Tuberkulosis merupakan penyakit menular yang terus menjadi masalah kesehatan masyarakat, menyebabkan kematian jutaan orang setiap tahunnya. Menurut badan kesehatan global, *World Health Organization* (WHO), tuberkulosis merupakan salah satu dari 10 penyebab kematian terbesar di dunia. Indonesia berada di urutan ke 3 negara dengan kasus TBC tertinggi di dunia setelah India dan Cina. Penyakit ini dapat berakibat fatal bagi penderitanya jika tidak segera ditangani. Tuberkulosis disebabkan oleh infeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis* (Kemenkes RI, 2022). Salah satu parameter penting dalam model epidemik adalah berapa banyaknya rata-rata kasus penyakit jika ada satu kasus primer atau lebih dikenal dengan istilah angka reproduksi dasar ( $R_0$ ). Salah satu kegunaan penting dari  $R_0$  adalah untuk menentukan kriteria kestabilan dari titik kesetimbangan sistem. Jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan akan stabil dan epidemik akan berakhir dan jika  $R_0 > 1$  maka akan terjadi epidemik (Diekmann & Heesterbeek, 2000).

Masalah klasik yang dapat dijumpai dalam epidemiologi matematika adalah analisis kestabilan global titik ekuilibrium. Kestabilan itu sendiri bersifat lokal dan global. Kestabilan lokal dapat dengan mudah ditentukan dengan pendekatan linear, sedangkan sifat global cukup sulit ditentukan. Kestabilan lokal yang biasa dilakukan dengan linearisasi jacobian biasanya hanya dapat menyelidiki kestabilan disekitar titik ekuilibrium saja (bersifat lokal) dan tidak dapat menjelaskan kesetimbangan secara global. Oleh karenanya salah satu cara menentukan kestabilan secara global adalah dengan menggunakan Kestabilan Lyapunov. Pada akhir abad ke-19, seorang matematikawan asal Rusia, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, mengembangkan pendekatan untuk analisis kestabilan yang saat ini dikenal sebagai metode Lyapunov langsung (Lyapunov's direct method). Kelebihan dari metode Lyapunov adalah bahwa untuk menyelesaikan permasalahan kestabilan sistem yang perlu diketahui adalah bentuk persamaan diferensial sistemnya atau bentuk fisisnya bukan solusinya. Fungsi Lyapunov tidak terbatas pada sistem linear. Fungsi ini dapat digunakan dalam analisis sistem dinamis nonlinear yang lebih kompleks, di mana metode lain mungkin sulit diterapkan.

Penelitian yang dilakukan oleh Sychah, dkk (2016), menyajikan model epidemik SIRS yang kemudian diselidiki titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium menggunakan fungsi Lyapunov. Oleh karenanya, penulis tertarik dalam penelitian ini membahas hal yang serupa dalam melakukan konstruksi fungsi Lyapunov, tetapi dengan menggunakan sistem dan metode yang berbeda. Sehingga penelitian ini bertujuan untuk memeriksa keberadaan titik ekuilibrium

model epidemik SIR, kemudian akan dilakukan konstruksi fungsi Lyapunov dengan menggunakan beberapa metode. Selanjutnya, menganalisis kestabilan global model menggunakan fungsi Lyapunov. Akan dilakukan konstruksi fungsi Lyapunov pada hasil penelitian yang dilakukan oleh Mustianah (2019) yaitu model matematika epidemik SIR penyebaran penyakit Tuberkulosis.

## METODE

Adapun model awal dan nilai parameter SIR yang digunakan ialah model epidemik SIR penyebaran penyakit tuberkulosis hasil dari penelitian Mustianah (2019), yakni sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \\ \frac{dR}{dt} &= cI - \mu R\end{aligned}\tag{1}$$

Persamaan (1) merepresentasikan secara berurutan S sebagai jumlah individu yang sehat dan rentan terhadap penyakit tuberkulosis, I sebagai jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit tuberkulosis, R sebagai jumlah individu yang sembuh setelah terinfeksi penyakit tuberkulosis, serta  $N$  adalah total populasi seluruhnya dimana  $N = S + I + R$ . Adapun parameter yang digunakan pada persamaan (1) yaitu,  $\Pi$  menyatakan angka kelahiran populasi,  $\mu$  menyatakan laju kematian alami,  $\mu_t$  menyatakan laju kematian akibat penyakit tuberkulosis,  $b$  menyatakan laju penularan penyakit tuberkulosis, dan  $c$  menyatakan laju kesembuhan penyakit tuberkulosis.

Dari persamaan (1), ditentukan titik ekuilibriumnya dan ditentukan linearisasi matriks jakobian. Akan dilakukan proses konstruksi fungsi Lyapunov menggunakan metode variabel gradien dan metode Krasovskii. Setelah didapatkan kandidat fungsi Lyapunovnya, dilakukan analisis sifat kestabilan titik-titik ekuilibrium model tersebut dengan berdasarkan kriteria kestabilan fungsi Lyapunov.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Sistem Epidemik SIR

Digunakan persamaan epidemik SIR penyebaran penyakit Tuberkulosis pada penelitian Mustianah (2019). Untuk mendapatkan titik kesetimbangan dari sistem (1) yaitu  $f_1(S, I, R) = \frac{dS}{dt}$ ,  $f_2(S, I, R) = \frac{dI}{dt}$ , dan  $f_3(S, I, R) = \frac{dR}{dt}$  dengan  $(S, I, R) \in \mathbb{R}^3$ , maka  $\frac{dS}{dt} = 0$ ,  $\frac{dI}{dt} = 0$ ,  $\frac{dR}{dt} = 0$ . Sehingga didapatkan dua titik ekuilibrium yaitu titik  $E_0 = (S^0, I^0, R^0) = (\frac{\Pi}{\mu}, 0, 0)$  yaitu saat kondisi bebas penyakit dan kondisi saat terjadi endemik yaitu titik  $E_1 = (S^*, I^*, R^*) = (\frac{\Pi(c+\mu)}{\mu(b-\mu_t)}, \frac{-\Pi(c-b+\mu+\mu_t)}{bc+b\mu+b\mu_t-c\mu_t-\mu\mu_t-\mu_t^2}, \frac{-\Pi(c^2-bc+c\mu+c\mu_t)}{\mu(b\mu-\mu_t^2-\mu\mu_t+bc+b\mu_t-c\mu_t)})$ , dengan syarat  $\mu \neq 0$ , dan  $b \neq \mu_t$ . Nilai parameter yang digunakan yaitu nilai pada penelitian Mustianah (2019), dimana nilai  $\Pi = 9000$ ,  $b = 0,0062$ ,  $\mu = 0,0147885$ ,  $\mu_t = 0,00515$ , dan  $c = 4$ .

### Konstruksi Fungsi Lyapunov menggunakan Variabel Gradien

Langkah-langkah dalam mengkonstruksi fungsi Lyapunov menggunakan metode variable gradien adalah sebagai berikut:

- Asumsikan suatu gradien dari fungsi Lyapunov  $V(x)$  sebagai parameter

$$\nabla V(x) = [\nabla V_1 \dots \nabla V_n]^T = \left[ \frac{dV}{dx_1} \dots \frac{dV}{dx_n} \right]^T$$

Dengan  $\nabla V_i = \sum_{j=1}^n h_{ij} x_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $h_{ij}$  adalah sebuah konstanta dan  $x_j$  adalah variabel suatu sistem yang memenuhi kondisi curl yaitu

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\nabla V_j}{\partial x_i}$$

- Variabel gradien fungsi Lyapunov  $\nabla V$  digunakan untuk mencari  $\dot{V}(x) = (\nabla V)^T \dot{X}$ .
- Batasi  $\dot{V}(x)$  menjadi definit negaif
- Gunakan persyaratan kondisi curl
- Periksa kembali  $V$
- Fungsi Lyapunov dapat dihitung dengan integral

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^x \nabla V(x) dx \\ &= \int_0^{x_1, (x_2=x_3=\dots=x_n=0)} \nabla V_1(x) dx_1 + \int_0^{x_2, (x_1=x_3=x_4=\dots=x_n=0)} \nabla V_2(x) dx_2 + \dots \\ &\quad + \int_0^{x_n, (x_1=x_2=x_3=\dots=x_{n-1}=x_{n-1})} \nabla V_n(x) dx_n \end{aligned}$$

Berdasarkan langkah-langkat dalam menkontruksi fungsi Lyapunov menggunakan metode variable gradien, maka pada model yang dibahas tadi akan dikonstruksi fungsi Lyapunov.

Misalkan

$$\nabla V(S, I, R) = \begin{bmatrix} h_{11}S + h_{12}I + h_{13}R \\ h_{21}S + h_{22}I + h_{23}R \\ h_{31}S + h_{32}I + h_{33}R \end{bmatrix}$$

Kemudian mencari  $h_{ij}$  yang memenuhi kondisi curl dan turunan dari fungsi Lyapunov bernilai negatif. Turunan dari fungsi Lyapunov adalah

$$\dot{V}(S, I, R) = \nabla V^T(S, I, R) f(S, I, R)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} h_{11}S + h_{12}I + h_{13}R \\ h_{21}S + h_{22}I + h_{23}R \\ h_{31}S + h_{32}I + h_{33}R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \\ \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \\ cI - \mu R \end{bmatrix} \\ &= \left( h_{11}S\Pi - h_{11} \frac{bIS^2}{N} - h_{11}\mu S^2 + h_{12}I\Pi - h_{12} \frac{bI^2S}{N} - h_{12}\mu SI + h_{13}R\Pi - h_{13} \frac{bISR}{N} - \right. \\ &\quad \left. h_{13}R\mu S \right) + \left( h_{21} \frac{bIS^2}{N} - h_{21}SI(\mu + \mu_t + c) + h_{22} \frac{bI^2S}{N} - h_{22}I^2(\mu + \mu_t + c) + \right. \\ &\quad \left. h_{23} \frac{bISR}{N} - h_{23}RI(\mu + \mu_t + c) \right) + \left( h_{31}cSI - h_{31}\mu SR + h_{32}cI^2 - h_{32}\mu RI + \right. \\ &\quad \left. h_{33}cIR - h_{33}\mu R^2 \right) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kondisi curl, dipilih  $h_{ij} = h_{ji}$ , maka

$$\begin{aligned} \dot{V}(S, I, R) &= \left( h_{11}S\Pi - h_{11} \frac{bIS^2}{N} - h_{11}\mu S^2 + h_{12}I\Pi - h_{12} \frac{bI^2S}{N} - h_{12}\mu SI + h_{13}R\Pi - h_{13} \frac{bISR}{N} - \right. \\ &\quad \left. h_{13}\mu SR \right) + \left( h_{12} \frac{bIS^2}{N} - h_{12}SI(\mu + \mu_t + c) + h_{22} \frac{bI^2S}{N} - h_{22}I^2(\mu + \mu_t + c) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_{23} \frac{bISR}{N} - h_{23}RI(\mu + \mu_t + c) + h_{13}cSI - h_{13}\mu SR + h_{23}cI^2 - h_{23}\mu RI + h_{33}cIR - \\
& h_{33}\mu R^2) \\
& = S^2 \left( -h_{11} \frac{bI}{N} - h_{11}\mu + h_{12} \frac{bI}{N} \right) + I^2 \left( -h_{12} \frac{bS}{N} + h_{22} \frac{bS}{N} - h_{22}(\mu + \mu_t + c) + h_{23}c \right) + \\
& R^2(-h_{33}\mu) + SI(-h_{12}\mu - h_{12}(\mu + \mu_t + c) + h_{13}c) + SR(-h_{13}\mu - h_{13}\mu) + \\
& IR(-h_{23}(\mu + \mu_t + c) - h_{23}\mu + h_{33}c) + h_{11}S\Pi + h_{12}I\Pi + h_{13}R\Pi
\end{aligned}$$

Agar  $\dot{V}(S, I, R)$  definit negatif maka dipilih  $h_{ij} = 1$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(S, I, R) & = S^2 \left( -\frac{bI}{N} - \mu + \frac{bI}{N} \right) + I^2 \left( -\frac{bS}{N} + \frac{bS}{N} - (\mu + \mu_t + c) + c \right) + R^2(-\mu) + \\
& SI(-\mu - (\mu + \mu_t + c) + c) + SR(-\mu - \mu) + IR(-(\mu + \mu_t + c) - \mu + c) + S\Pi + \\
& I\Pi + R\Pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(S, I, R) & = -(\mu)S^2 - (\mu + \mu_t)I^2 - (\mu)R^2 - (2\mu + \mu_t)SI - (2\mu)SR - (2\mu + \mu_t)IR + \\
& \Pi(S + I + R) < 0
\end{aligned}$$

$$\Pi(S + I + R) < (\mu)S^2 + (\mu + \mu_t)I^2 + (\mu)R^2 + (2\mu + \mu_t)SI + (2\mu)SR + (2\mu + \mu_t)IR$$

Fungsi Lyapunov diperoleh dengan,

$$\begin{aligned}
V(S, I, R) & = \int_0^{S, (I=R=0)} \nabla V_1 dS + \int_0^{I, (S=S, R=0)} \nabla V_2 dI + \int_0^{R, (S=S, I=I)} \nabla V_3 dR \\
& = \int_0^{S, (I=R=0)} (S + I + R) dS + \int_0^{I, (S=S, R=0)} (S + I + R) dI + \int_0^{R, (S=S, I=I)} (S + I + R) dR \\
& = \int_0^{S, (I=R=0)} (S) dS + \int_0^{I, (S=S, R=0)} (S + I) dI + \int_0^{R, (S=S, I=I)} (S + I + R) dR \\
& = \frac{1}{2}S^2 + SI + \frac{1}{2}I^2 + SR + IR + \frac{1}{2}R^2 \\
& = \frac{1}{2}(S^2 + I^2 + R^2) + SI + SR + IR
\end{aligned}$$

Diperoleh fungsi  $V$  definit positif, maka konstruksi terpenuhi. Selanjutnya fungsi Lyapunov dianalisis kestabilannya.

#### 1. Fungsi Lyapunov untuk titik kesetimbangan bebas penyakit

Fungsi Lyapunov  $V(x): \{S, I, R \in D: S > 0\}$  dapat dimodifikasi dengan memasukkan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu  $E_0 = (S^0, I^0, R^0) = (\frac{\Pi}{\mu}, 0, 0)$ , sehingga diperoleh

$$V(S, I, R) = \frac{1}{2}((S - S^0)^2 + I^2 + R^2) + (S - S^0)I + (S - S^0)R + IR$$

Diperoleh  $V(S, I, R) > 0$ , untuk  $S \neq S^0, I, R \neq 0$ , serta  $V(S^0, I^0, R^0) = 0$ . Turunan fungsi Lyapunov pada titik kesetimbangan ini adalah,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) & = \frac{\partial V}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R} \frac{dR}{dt} \\
& = ((S - S^0) + I + R) \frac{dS}{dt} + (I + (S - S^0) + R) \frac{dI}{dt} + (R + (S - S^0) + I) \frac{dR}{dt} \\
& = ((S - S^0) + I + R) \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) + (I + (S - S^0) + R) \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) + \\
& (R + (S - S^0) + I)cI - \mu R)
\end{aligned}$$

Karena  $\Pi = \mu S^0$ , maka

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) & = ((S - S^0) + I + R) \left( \mu S^0 - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) + (I + (S - S^0) + R) \left( \frac{bIS}{N} - \right. \\
& \left. (\mu + \mu_t + c)I \right) + (R + (S - S^0) + I)(cI - \mu R)
\end{aligned}$$

Hasil dari  $\dot{V}(x) = 0$  jika dan hanya jika  $S = S^0, I = 0, \text{ dan } R = 0$ . Selanjutnya untuk mengecek  $\dot{V}(x)$  di atas adalah negatif, maka dimasukkan ke dalam program dengan perolehan hasilnya dapat dilihat pada gambar 1 dan 2.

## 2. Fungsi Lyapunov untuk titik kesetimbangan endemik

Fungsi Lyapunov dapat dimodifikasi dengan memasukkan titik kesetimbangan saat endemik yaitu  $E_1 = (S^*, I^*, R^*)$ , diperoleh

$$V(S, I, R) = \frac{1}{2}((S - S^*)^2 + (I - I^*)^2 + (R - R^*)^2) + (S - S^*)(I - I^*) + (S - S^*)(R - R^*) + (I - I^*)(R - R^*)$$

Didapatkan persamaan di atas yaitu  $V > 0$ , untuk  $S \neq S^*, I \neq I^*, R \neq R^*$ , serta  $V(S^*, I^*, R^*) = 0$ . Turunan fungsi Lyapunov pada titik kesetimbangan ini adalah,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R} \frac{dR}{dt} \\ &= ((S - S^*) + (I - I^*) + (R - R^*)) \frac{dS}{dt} + ((I - I^*) + (S - S^*) + (R - R^*)) \frac{dI}{dt} + ((R - R^*) + (S - S^*) + (I - I^*)) \frac{dR}{dt} \\ &= ((S - S^*) + (I - I^*) + (R - R^*)) \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) + ((I - I^*) + (S - S^*) + (R - R^*)) \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) + ((R - R^*) + (S - S^*) + (I - I^*)) (cI - \mu R) \\ &= ((S - S^*) + (I - I^*) + (R - R^*)) (\Pi - \mu(S + I + R) - \mu_t I) \end{aligned}$$

Hasil dari  $\dot{V}(x) = 0$  jika dan hanya jika  $S = S^*, I = I^*, \text{ dan } R = R^*$ . Selanjutnya untuk mengecek  $\dot{V}(x)$  di atas adalah negatif, maka dimasukkan ke dalam program dengan perolehan hasilnya dapat dilihat pada gambar 3 dan 4.

## Konstruksi Fungsi Lyapunov menggunakan Metode Krasovskii

Menentukan matriks Jakobian dari sistem (3.12), yaitu

$$\bar{J}(x) = \begin{bmatrix} \frac{-bI}{N} + \frac{bIS}{N^2} - \mu & \frac{-bS}{N} + \frac{bIS}{N^2} & \frac{bIS}{N^2} \\ \frac{-bI}{N} + \frac{bIS}{N^2} & \frac{bS}{N} - \frac{bIS}{N^2} - \mu - \mu_t - c & \frac{-bIS}{N^2} \\ 0 & c & -\mu \end{bmatrix}$$

1. Titik kesetimbangan pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (\frac{\Pi}{\mu}, 0, 0)$ , disubstitusikan pada matriks  $\bar{J}(x)$ , sehingga diperoleh matriks

$$\bar{J}(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -b & 0 \\ 0 & b - \mu - \mu_t - c & 0 \\ 0 & c & -\mu \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan matriks  $P$  berdasarkan persamaan  $\bar{Q}(x) = P\bar{J}(x) + \bar{J}^T(x)P$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{Q}(x) &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mu & -b & 0 \\ 0 & b - \mu - \mu_t - c & 0 \\ 0 & c & -\mu \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\mu & -b & 0 \\ -b & b - \mu - \mu_t - c & c \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Berdasarkan metode Krasovskii, kondisi titik kesetimbangan menjadi stabil asimtotik pada  $F(x) = P\bar{J}(x) + \bar{J}^T(x)P + \bar{Q}(x) = 0$ , atau  $P\bar{J}(x) + \bar{J}^T(x)P = -\bar{Q}(x)$ , dengan  $Q(x)$  adalah matriks identitas. Mencari nilai  $P_{ij}$ , maka digunakan yaitu dengan memasukkan nilai parameter yang diperoleh pada penelitian Mustianah (2019), dimana nilai  $\Pi = 9000$ ,  $b = 0,0062$ ,  $\mu = 0,0147885$ ,  $\mu_t = 0,00515$ , dan  $c = 4$ . Sehingga didapatkan

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,7838 & -0,0519 & 0 \\ -0,0519 & 33,5533 & 33,5440 \\ 0 & 33,5440 & 33,7838 \end{bmatrix}$$

Diperoleh determinan submatriks utama dari matriks P bernilai positif. Berdasarkan kriteria Sylvester, jika setiap determinan submatriks utama bernilai positif, maka matriks P merupakan matriks definit positif sehingga  $x^T P x > 0$  untuk  $x \neq 0$ . Hal ini mengakibatkan  $V(x) = f^T(x) P f(x) > 0$ , dan karena  $Q \leq 0$  maka  $\dot{V}(x) = f^T(x) Q f(x) \leq 0$ . Berdasarkan teorema, jika  $Q \leq 0, P > 0$ , maka persamaan tersebut merupakan sistem yang stabil asimtotik. Sehingga fungsi Lyapunov adalah

$$\begin{aligned} V(x) &= f^T(x) P f(x) \\ &= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 33,7838 & -0,0519 & 0 \\ -0,0519 & 33,5533 & 33,5440 \\ 0 & 33,5440 & 33,7838 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 33,7838f_1 - 0,0519f_2 \\ -0,0519f_1 + 33,5533f_2 + 33,5440f_3 \\ 33,5440f_2 + 33,7838f_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \\ &= 33,7838 \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right)^2 - 2(0,0519) \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) \left( \frac{bIS}{N} - \right. \\ &\quad \left. (\mu + \mu_t + c)I \right) + 33,5533 \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right)^2 + 2(33,5440) \left( \frac{bIS}{N} - \right. \\ &\quad \left. (\mu + \mu_t + c)I \right) (cI - \mu R) \\ &\quad + 33,7838 (cI - \mu R)^2 \end{aligned}$$

Dengan turunan  $V(x)$  yaitu

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R} \frac{dR}{dt} \\ &= \left\{ 67,567 \left( \mu + \frac{bI}{N} - \frac{bIS}{N^2} \right) (\mu S - \Pi - \frac{bIS}{N}) - 67,107((\mu + \mu_t + c)I - \right. \\ &\quad \left. \frac{bIS}{N}) \left( \frac{bI}{N} - \frac{bIS}{N^2} \right) + (cI - \mu R) \left( 67,088 \frac{bI}{N} - 67,088 \frac{bIS}{N^2} \right) + \left( \frac{bI}{N} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{bIS}{N^2} \right) \left( 0,1038\mu S - 0,1038\Pi + 0,1038 \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{bIS}{N} \right) \left( 0,1038\mu + 0,1038 \frac{bI}{N} - 0,1038 \frac{bIS}{N^2} \right) \right\} (\Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S) \quad + \\ &\quad \left\{ 67,1066 \left( (\mu + \mu_t + c)I - \frac{bIS}{N} \right) \left( (\mu + \mu_t + c) - \frac{bS}{N} + \frac{bIS}{N^2} \right) - (cI - \right. \\ &\quad \left. \mu R) \left( 67,088(\mu + \mu_t + c) - 67,088 \frac{bS}{N} - 67,088 \frac{bIS}{N^2} \right) - \left( 0,1038 \frac{bS}{N} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 0,1038 \frac{bIS}{N^2} \right) \left( (\mu + \mu_t + c)I - \frac{bIS}{N} \right) + 67,567 \left( \frac{bS}{N} - \frac{bIS}{N^2} \right) \left( \mu S - \Pi + \frac{bIS}{N} \right) - \right. \\ &\quad \left. c \left( 67,088(\mu + \mu_t + c)I - 67,088 \frac{bIS}{N} \right) + 67,567c(cI - \mu R) - \right. \\ &\quad \left. \left( 0,1038\mu S + 0,1038\Pi + 0,1038 \frac{bIS}{N} \right) \left( (\mu + \mu_t + c) - \frac{bS}{N} + \frac{bIS}{N^2} \right) \right\} \left( \frac{bIS}{N} - \right. \\ &\quad \left. (\mu + \mu_t + c)I \right) + \left\{ \mu \left( 67,088(\mu + \mu_t + c)I - 67,088 \frac{bIS}{N} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$67,567\mu(cI - \mu R) - \frac{(bIS(0,1038\mu S - 0,1038\Pi + 0,1038\frac{bIS}{N}))}{N^2} - \frac{67,567bIS(\mu S - \Pi + \frac{bIS}{N})}{N^2} + \frac{67,2104bIS((\mu + \mu_t + c)I - \frac{bIS}{N})}{N^2} - \frac{67,088bIS(cI - \mu R)}{N^2}\}(cI - \mu R)$$

2. Titik kesetimbangan pada titik kesetimbangan endemik  $E_1 = (S^*, I^*, R^*)$ , disubstitusikan pada matriks  $\bar{J}(x)$ . Berdasarkan metode Krasovskii, kondisi titik kesetimbangan menjadi stabil asimtotik pada  $F(x) = P\bar{J}(x) + \bar{J}^T(x)P + \bar{Q}(x) = 0$ , atau  $P\bar{J}(x) + \bar{J}^T(x)P = -\bar{Q}(x)$ , dengan  $Q(x)$  adalah matriks identitas. Nilai  $P_{ij}$  yang digunakan yaitu dengan memasukkan nilai parameter yang diperoleh pada penelitian Mustianah (2019), dimana nilai  $\Pi = 9000$ ,  $b = 0,0062$ ,  $\mu = 0,0147885$ ,  $\mu_t = 0,00515$ , dan  $c = 4$ . Sehingga didapatkan,

$$\bar{J}(E_1) = \begin{bmatrix} -1544,991 - \mu & -2195,764b & 1547,377b \\ 1544,991b & 2195,764b - \mu - \mu_t - c & 1547,377b \\ 0 & c & -\mu \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan matriks  $P$  berdasarkan persamaan  $\bar{Q}(x) = P\bar{J}(x) + \bar{J}^T(x)P$ , diperoleh

$$\bar{Q}(x) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1544,991b - \mu & -2195,764b & 1547,377b \\ 1544,991b & 2195,764b - \mu - \mu_t - c & 1547,377b \\ 0 & c & -\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1544,991b - \mu & 1544,991b & 0 \\ -2195,764b & 2195,764b - \mu - \mu_t - c & c \\ 1547,377b & 1547,377b & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan nilai  $P_{ij}$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 4448751195221.6703 & 4455624763726.9801 & 4455622774059.069 \\ 4455624763726.9801 & 4462043920507.683 & 4462506959107.786 \\ 4455622774059.069 & 4462506959107.786 & 4462504966863.091 \end{bmatrix}$$

Terdapat determinan submatriks utama dari matriks  $P$  bernilai negatif. Berdasarkan kriteria Sylvester, matriks  $P$  tidak memenuhi persyaratan matriks definit positif, sehingga persamaan tersebut merupakan sistem yang tidak stabil.

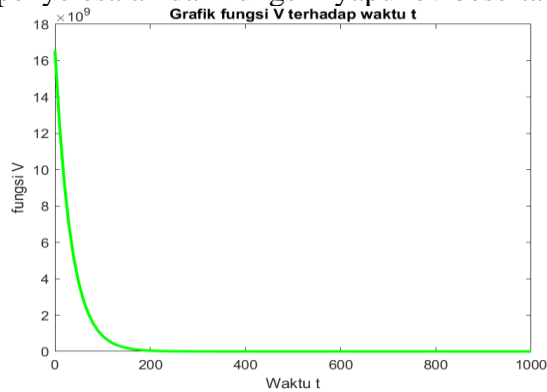
Fungsi Lyapunovnya adalah

$$V(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4448751195221.6703 & 4455624763726.9801 & 4455622774059.069 \\ 4455624763726.9801 & 4462043920507.683 & 4462506959107.786 \\ 4455622774059.069 & 4462506959107.786 & 4462504966863.091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4448751195221,6703f_1 + 4455624763726,9801f_2 + 4455622774059,069f_3 \\ 4455624763726,9801f_1 + 4462043920507,683f_2 + 4462506959107,786f_3 \\ 4455622774059,069f_1 + 4462506959107,786f_2 + 4462504966863,091f_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = 4448751195221.6703 \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right)^2 + 4455624763726,9801 \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) + 4455622774059.069 \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) (cI - \mu R) + 4455624763726,9801 \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) + 4462043920507,683 \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right)^2 + 4462506959107,786 \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) (cI - \mu R) + 4455622774059,069 \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) (cI - \mu R) + 4462506959107,786 \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) (cI - \mu R) + 4462504966863,091 (cI - \mu R)^2$$

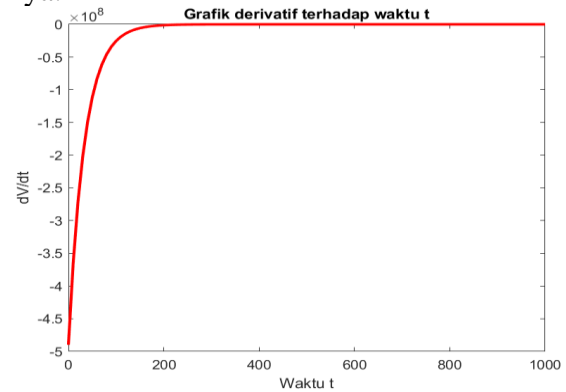


## Simulasi dan Analisis

Nilai parameter yang digunakan yaitu berdasarkan pada penelitian Mustianah (2019), dimana nilai  $\Pi = 9000$ ,  $b = 0,0062$ ,  $\mu = 0,0147885$ ,  $\mu_t = 0,00515$ , dan  $c = 4$ . Berikut ini adalah hasil penyelesaian dari fungsi Lyapunov beserta turunannya.

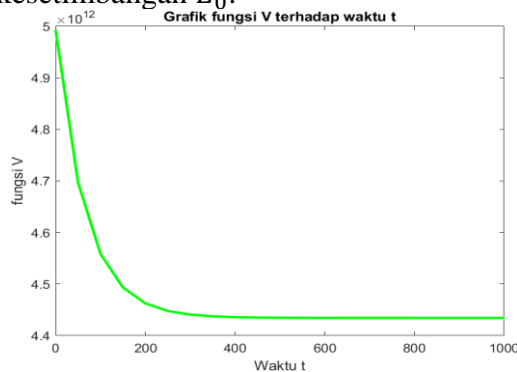


Gambar 1. Grafik Fungsi Lyapunov dengan Metode Variabel Gradien

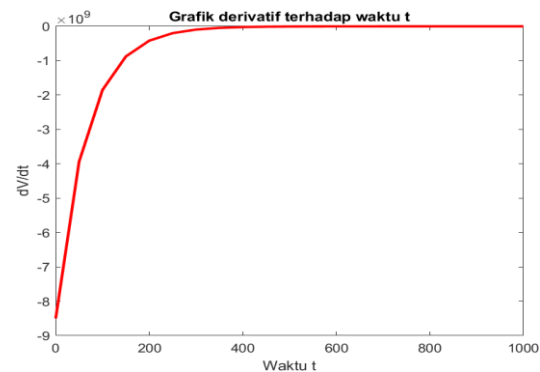


Gambar 2. Grafik Turunan Fungsi Lyapunov dengan Metode Variabel Gradien

Berdasarkan gambar 1 dan gambar 2, sistem dapat dikatakan stabil asimtotik berdasarkan fungsi Lyapunovnya. Terlihat bahwa fungsi Lyapunov menggunakan metode variabel gradien berada pada nilai positif dan bergerak menuju nol. Kemudian turunannya berada pada nilai negatif dan bergerak menuju titik nol. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi Lyapunov dapat dikonstruksi menggunakan metode variabel gradien untuk sistem epidemik SIR penyakit tuberkulosis pada titik kesetimbangan  $E_0$ .

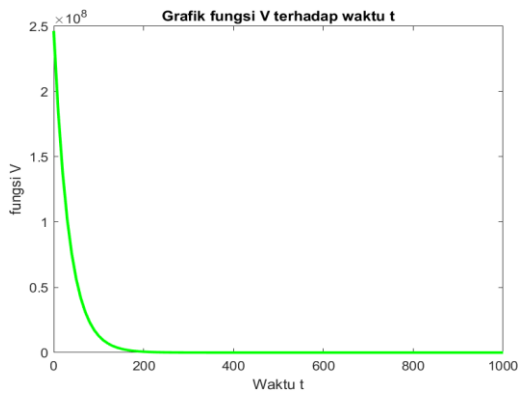


Gambar 3. Grafik Fungsi Lyapunov dengan Metode Variabel Gradien

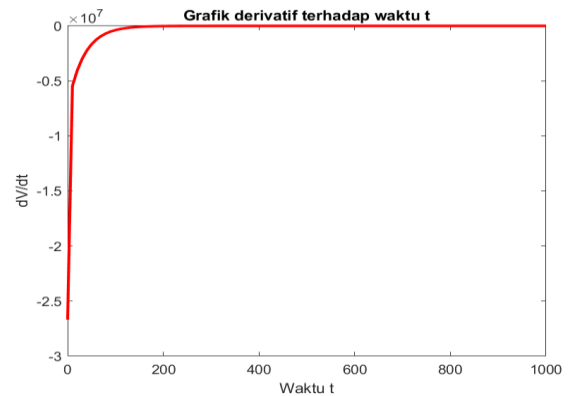


Gambar 4. Grafik Turunan Fungsi Lyapunov dengan Metode Variabel Gradien

Berdasarkan gambar 3 dan gambar 4, sistem dapat dikatakan stabil asimtotik berdasarkan fungsi Lyapunovnya. Terlihat bahwa fungsi Lyapunov menggunakan metode variabel gradien berada pada nilai positif, kemudian turunannya berada pada nilai negatif yaitu  $\dot{V}(x) < 0$ . Hal ini menunjukkan bahwa fungsi Lyapunov dapat dikonstruksi menggunakan metode variabel gradien untuk sistem epidemik SIR penyakit tuberkulosis pada titik kesetimbangan  $E_1$ .

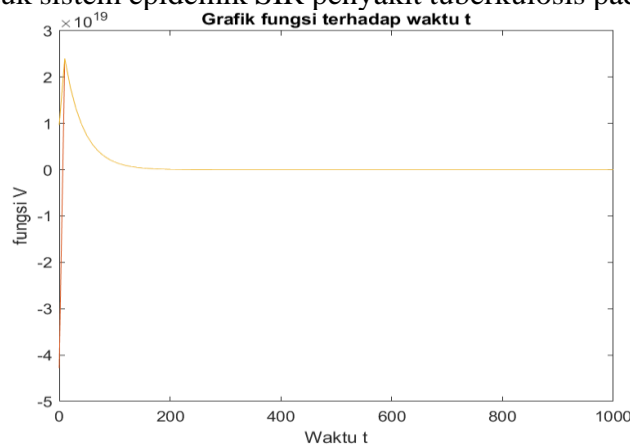


Gambar 5. Grafik Fungsi Lyapunov dengan Metode Krasovskii



Gambar 6. Grafik Turunan Fungsi Lyapunov dengan Metode Krasovskii

Berdasarkan gambar 5 dan gambar 6, sistem dapat dikatakan stabil asimtotik berdasarkan fungsi Lyapunov. Terlihat bahwa fungsi Lyapunov menggunakan metode Krasovskii berada pada nilai positif dan bergerak menuju nol. Kemudian turunannya berada pada nilai negatif dengan bergerak menuju titik nol. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi Lyapunov dapat dikonstruksi menggunakan metode Krasovskii untuk sistem epidemik SIR penyakit tuberkulosis pada titik kesetimbangan  $E_0$ .



Gambar 7. Grafik Fungsi Lyapunov dengan Metode Krasovskii

Berdasarkan gambar 7, terlihat bahwa fungsi Lyapunov  $V(x)$  menggunakan metode Krasovskii berada pada nilai positif dan terdapat juga pada bagian negatif yang bergerak menuju nol. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi Lyapunov  $V(x)$  tidak definit positif. Sehingga tidak dapat dikonstruksi menggunakan metode Krasovskii untuk sistem epidemik SIR penyakit tuberkulosis pada titik kesetimbangan  $E_1$ .

### KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. a. Sistem persamaan SIR tuberkulosis pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (\frac{\pi}{\mu}, 0, 0)$  diperoleh:
  - i. Fungsi Lyapunov dapat dikonstruksi dengan menggunakan metode variabel gradien yaitu  $V(S, I, R) = \frac{1}{2} ((S - S^0)^2 + I^2 + R^2) + (S - S^0)I + (S - S^0)R + IR$
  - ii. Fungsi Lyapunov dapat dikonstruksi dengan menggunakan metode Krasovskii yaitu

$$V(S, I, R) = 33,7838 \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right)^2 - 2(0,0519) \left( \Pi - \frac{bIS}{N} - \mu S \right) \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) + 33,5533 \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right)^2 + 2(33,5440) \left( \frac{bIS}{N} - (\mu + \mu_t + c)I \right) (cI - \mu R) + 33,7838(cI - \mu R)^2$$

- b. Sistem persamaan SIR tuberkulosis pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1 = \left( \frac{\Pi(c+\mu)}{\mu(b-\mu_t)}, \frac{-\Pi(c-b+\mu+\mu_t)}{bc+b\mu+b\mu_t-c\mu_t-\mu\mu_t-\mu_t^2}, \frac{-a(c^2-bc+c\mu+c\mu_t)}{\mu(b\mu-\mu_t^2-\mu\mu_t+bc+b\mu_t-c\mu_t)} \right)$  diperoleh:
- Fungsi Lyapunov dapat dikonstruksi dengan menggunakan metode variabel gradien yaitu  $V(S, I, R) = \frac{1}{2}((S - S^*)^2 + (I - I^*)^2 + (R - R^*)^2) + (S - S^*)(I - I^*) + (S - S^*)(R - R^*) + (I - I^*)(R - R^*)$
  - Fungsi Lyapunov tidak dapat dikonstruksi dengan menggunakan metode Krasovskii.
2. Model yang didapatkan stabil asimtotik secara global menggunakan metode variabel gradien pada saat titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  dan endemik  $E_1$ . Sedangkan dengan menggunakan metode Krasovskii diperoleh stabil asimtotik hanya di salah satu titik kesetimbangan yaitu saat bebas penyakit  $E_0$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E., dan DiPrima R. C., 2012, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems 10<sup>th</sup> Edition, Grafton, New York.
- Diekman, O., dan Heesterbeek, 2000, Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases, Academic Press, New York.
- Ginting, I., 2010, Teori Kestabilan Lyapunov, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- Kemkes RI (2022) Dashboard TBC. Available at: [https://yankes.kemkes.go.id/view\\_artikel/1375/tbc](https://yankes.kemkes.go.id/view_artikel/1375/tbc).
- Luenberger, D. G., 1979, Introduction to dynamical system theory, models, and applications, John Wiley & Sons, Inc, Canada.
- Mahayana, D., Anwari, S., Sulisty, B., Rahman, F. N., dan Natanel D. P., 2021, Lyapunov Stability Analysis of Covid 19 SIR Modeling, International Journal on Electrical Engineering and Informatics, 13(1), 73-86.
- Mustianah, L., 2019, Analisis Dinamik Model Epidemik SIR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Mataram dengan Estimasi Parameter menggunakan Jaringan Syaraf Tiruan, Skripsi, FMIPA Universitas Mataram, Mataram.
- Ndii, M. Z., 2022, Pemodelan Matematika, PT. Nasya Expanding Management, Jawa Tengah.
- Olsder, G. J., Woude, V. D., Maks, J. G., dan Jeltsema, D., 2011, Mathematical Systems Theory Fourth Edition, Delft University of Technology, Delft.
- Perko, L., 1991, Differential Equation and Dynamical systems, Springer, Verlag Berlin-Heidelberg-New York.
- Peterson, H. N., 1966, An application of the variable gradient method of generating Liapunov functions to discrete systems, Masters Theses, University Of Missouri At Rolla, Missouri.
- Polderman, J., W., dan Willems, J., C., 1997, Introduction to mathematical theory of system and control, Penerbit Spinger-Verlag, Berlin.
- Rayendra, Lestari, S., Perdana, R. W., Yendrizal, dan Mulyani, N., 2021, Kecerdasan Buatan, CV. Mitra Cendekia Media, Sumatra Barat.
- Utomo, R. B., 2017, Empat Metode Pembentukan Fungsi Lyapunov, Prosiding Seminar Nasional Matematika 2017, Departemen Matematika FMIPA UI, Indonesia.
- Sinaga, L., P., Kartika, D., dan Nasution, H., 2021, Pengantar Sistem Dinamik, Penerbit Amal Insani, Banten.
- Sundari, R., dan Apriliani, E., 2017, Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan, JURNAL SAINS DAN SENI ITS, 6(1), A28-A32.

- Syechah, B. N., dan Apriliani, E., 2016, Construction of Lyapunov Function for SIRS Models, Proceeding of The 6<sup>th</sup> Annual Basic Science International Conference, Indonesia.
- Tjahjana, R. H., 2022, Kestabilan Sistem dengan Banyak Agen, CV. Jejak Pustaka, Bantul.
- Tulus, Siahaan, L. O., Marpaung, T. J., dan Syahputra, M. R., 2019, Stability analysis of heartbeat system with Lyapunov's direct method, Journal of Physics: Conferences Series, 1-4.
- Weiss, H. H., 2013, The SIR model and the Foundations of Public Health, MATerials MATematics, (3).
- Yulida, Y., Faisal, dan Ahsar, M. K., 2011, Analisis Kestabilan Global Epidemik SIRS menggunakan Fungsi Lyapunov, Jurnal Matematika Murni dan Terapan, 5(2), 19-30.
- Zadrak, M., N., 2018, Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik, Deepublish Publisher, Yogyakarta.