Jurnal Matematika Vol. 10, No.2, Desember 2020, pp. xx-xx ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2020.v10.i02.pxx

Pelestarian Karakteristik Pembangun Berhingga dari Gelanggang Noether ke Gelanggang Polinomialnya

Yunita Khairunnisa
Program Studi Matematika-Fakultas MIPA-Universitas Mataram, Indonesia
e-mail: khairunnisayunita082@gmail.com

Ni Wayan Switrayni
Program Studi Matematika-Fakultas MIPA-Universitas Mataram, Indonesia
e-mail: niwayan.switrayni@unram.ac.id

Fariz Maulana
Program Studi Magister Matematika-Fakultas MIPA-Institut Teknologi Bandung, Indonesia
Jl. Majapahit No. 62, Mataram
e-mail: 20120008@mahasiswa.itb.ac.id

I Gede Adhitya Wisnu Wardhana
Jl. Majapahit No. 62, Mataram
e-mail korespondensi: adhitya.wardhana@unram.ac.id

Abstract: *The idea of a principal ideal domain, where each of its ideals is generated by a single element, often cannot be maintained when constructing a new ring. For example, the ring of integers, which is a principal ideal domain, cannot preserve its ideal characteristic generated by a single element when constructing the polynomial ring of integers. However, the characteristics of ideals constructed finitely remain valid when building a new ring. Even for any Noetherian ring, a new ring that is also a Noetherian ring can always be constructed. In other words, if given a Noetherian ring, then its single-variable polynomial ring is also Noetherian. Furthermore, its multivariable polynomial ring is also a Noetherian ring.*

Keywords: *principal ideal domain, Noetherian ring, polynomial ring.*

Abstrak: *Ide dari daerah ideal utama, di mana setiap idealnya dibangun oleh satu unsur, seringkali tidak dapat dipertahankan dalam membangun gelanggang baru. Sebagai contoh, gelanggang bilangan bulat, yang merupakan daerah ideal utama, tidak dapat mempertahankan karakteristik idealnya yang dibangun oleh satu unsur saat membangun polinomial bilangan bulat. Namun, karakter dari ideal yang dibangun secara hingga tetap valid dalam membangun gelanggang baru. Bahkan untuk sebarang gelanggang Noether, selalu dapat dibangun gelanggang baru yang juga merupakan gelanggang Noether. Dengan* *kata lain, apabila diberikan suatu gelanggang Noether, maka gelanggang polinomial satu variabelnya juga Noether. Lebih jauh lagi, gelanggang polinomial multivariabelnya juga merupakan gelanggang Noether.*

***Kata kunci**: daerah ideal utama, gelanggang Noether, gelanggang polinomial.*

1. Pendahuluan

Ide dari daerah ideal utama, di mana setiap idealnya dibangun oleh satu unsur, seringkali tidak dapat dipertahankan dalam membangun gelanggang baru. Sebagai contoh, gelanggang bilangan bulat, yang merupakan daerah ideal utama, namun saat membangun polinomial bilangan bulat, karakteristik idealnya yang dibangun oleh satu unsur tidak berhasil dipertahankan. Namun, karakter dari ideal yang dibangun secara hingga tetap valid dalam membangun gelanggang baru. Bahkan, Hilbert telah menunjukkan bahwa untuk sebarang gelanggang Noether, selalu dapat dibangun gelanggang baru yang juga merupakan gelanggang Noether (Feraro, 2021). Apabila diberikan suatu gelanggang Noether, maka gelanggang polinomial satu variabelnya tetap Noether. Bahkan, gelanggang polinomial multivariabelnya juga merupakan gelanggang Noether (Bricalli, 2023). Hal ini menjadikan studi terkait gelanggang Noether menjadi sangat menarik.

Beberapa penelitian sebelumnya telah membahas mengenai gelanggang Noether dan gelanggang polinomial. Salah satunya adalah penelitian yang dilakukan oleh Khairunnisa, yang membahas tentang sifat ideal prima pada gelanggang Noether $Z[x]/\langle x^3\rangle$ (Khaerunnisa, 2018). Beberapa kasus khusus dalam pembahasan mengenai gelanggang Noether, seperti daerah Dedekind, telah diberikan perhatian oleh Maulana dan rekan-rekannya. Mereka mempertimbangkan beberapa sifat ideal prima pada daerah Dedekind $Z[x]/\langle x^2\rangle$. Maulana kemudian melanjutkan dengan menyajikan kasus yang lebih umum, berupa suatu ekuivalensi dari ideal prima dan ideal hampir prima pada bilangan bulat Gauss (Maulana, 2022). Selain itu, Misuki dan rekan-rekannya juga membahas tentang ideal prima pada bilangan bulat Gauss modulo (Misuki, 2021). Fatahillah dan timnya membahas perbandingan sifat ideal prima pada gelanggang polinomial $Z[x]$ dan $Z_n[x]$ (Fatahillah, 2022). Studi yang dilakukan oleh Fatahillah dan timnya hanya menganalisis ideal yang berbentuk $\langle x\rangle$ dan $\langle x + 1\rangle$. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji lebih jauh sifat pembangun berhingga gelanggang polinomial dari suatu gelanggang Noether.

2. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang akan digunakan pada penelitian ini adalah penelitian dasar, yang bertujuan untuk menemukan pengetahuan baru yang sebelumnya belum diketahui berdasarkan studi literatur. Penelitian ini dimulai dengan studi literatur yang kemudian dilanjutkan dengan penyusunan konjektur dari pembangun gelanggang Noether ke gelanggang polinomialnya. Dilanjutkan dengan menggunakan pembuktian deduktif pada konjektur, di mana konjektur tersebut akan dinyatakan sebagai teorema setelah terbukti.

3. Hasil dan Pembahasan

Gelanggang merupakan salah satu struktur matematika yang dipelajari pada bidang Aljabar. Berikut diberikan definisi gelanggang.

Definisi 3.1. (Wahyuni dkk, 2021) Sebuah gelanggang $(R, +, \cdot)$ adalah himpunan tak hampa R dengan operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$, sebut sebagai operasi penjumlahan dan perkalian, yang didefinisikan pada R sehingga memenuhi :

1. $(R, +)$ adalah grup abelian
2. Operasi perkalian bersifat asosiatif, dan
3. Untuk setiap $a,b,c \in R$, berlaku hukum distribusi kiri
   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan hukum distribusi kanan
   $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Suatu gelanggang R dinamakan gelanggang komutatif jika operasi perkalian di R bersifat komutatif, yakni $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a,b \in R$. Salah satu gelanggang yang spesial adalah daerah integral, definisinya diberikan sebagai berikut.

Definisi 3.2. (Wahyuni dkk, 2021) Suatu gelanggang komutatif R dengan elemen satuan disebut daerah integral jika R tidak memuat pembagi nol. Unsur tak nol $x \in R$ dikatakan pembagi nol apabila ada unsur tak nol $y \in R$ sehingga $xy = 0$.

Gelanggang Z dan Z_5 merupakan daerah integral, sementara Z_6 bukan merupakan daerah integral karena terdapat pembagi nol, yaitu 2 dan 3.

Salah satu substruktur yang menarik dari gelanggang adalah ideal, yang manadefinisinya diberikan di bawah.

Definisi 3.3. (Wahyuni dkk, 2021) Sebuah ideal pada suatu gelanggang R adalah adalah subhimpunan tak hampa I dari R sehingga jika $a \in I$ dan $r \in R$, maka $ar \in I$ dan $ra \in I$. Jika I ideal dari R, notasikan dengan $I \triangleleft R$.

Dan salah satu ideal khusus yang merupakan abstraksi dari bilangan prima dinamakan ideal prima, definisi dari ideal prima diberikan sebagai berikut

Definisi 3.4. (Wahyuni dkk, 2021) Sebuah ideal sejati N pada gelanggang komutatif R disebut ideal prima jika untuk setiap $a,b \in R$ dengan $ab \in N$ berimplikasi $a \in N$ atau $b \in N$.

Salah satu contoh ideal prima adalah ideal pZ, yang merupakan ideal prima di gelanggang Z untuk sebarang p bilangan prima di Z.

Berdasarkan jumlah wakilnya, maka ideal digolongkan menjadi ideal yang dibangun oleh berhingga unsur dan dibangun oleh tak hingga unsur. Pada artikel ini hanya dibahas ideal yang dibangun oleh berhingga unsur.

Definisi 3.5. (Wahyuni dkk, 2021) Misalkan I adalah ideal pada gelanggang komutatif R, ideal I disebut finitely generated (dibangun secara berhingga) apabila terdapat $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in I$, sehingga setiap unsur $x \in I$ berlaku $x = \Sigma_{i=1}^{n} r_i a_i$ untuk suatu $r_i \in R$.

Secara umum ideal yang dibangun secara hingga apabila setiap anggota dari ideal merupakan kombinasi linear dari berhingga unsur. Kasus khusus dari ideal yang dibangun oleh berhingga unsur adalah ideal yang hanya dibangun oleh satu unsur.

Definisi 3.6. (Wahyuni dkk, 2021) Misalkan $(R, +, \times)$ adalah gelanggang. Ideal I dari R disebut ideal utama jika I dapat dibangun oleh suatu elemen dalam R, yaitu ada $a \in R$ sedemikian sehingga $I = \langle a \rangle$.

Salah satu ideal khusus dari gelanggang adalah ideal maksimal, yakni ideal sejati yang tidak dimuat oleh ideal sejati lainnya.

Definisi 3.7. (Wahyuni dkk, 2021) Diberikan gelanggang R dengan M suatu idealnya. Ideal M disebut ideal maksimal jika $M \neq R$ dan tidak ada ideal I di R sedemikian sehingga $M \subset I \subset R$.

Berikut ini beberapa istilah penting untuk gelanggang komutatif yang memiliki unsur satuan.

Definisi 3.8. (Wahyuni dkk, 2021) Misalkan R gelanggang komutatif dengan elemen satuan 1_R dan $a,b \in R \backslash \{0_R\}$.

- elemen a dan b dikatakan berasosiasi, dinotasikan dengan $a \sim b$, jika $a = ub$ untuk suatu unit $u \in R$.
- elemen tak unit a disebut elemen tak tereduksi jika untuk setiap $r,s \in R$

dengan sifat a = rs berakibat r merupakan unit atau s merupakan unit.

- elemen tak unit a disebut elemen tereduksi jika terdapat $r,s \in R$ yang keduanya bukan unit sedemikian sehingga berlaku a = rs.
- elemen tak unit a disebut elemen prima jika untuk setiap $r,s \in R$ dengan sifat a|rs berakibat a|r atau a|s.

Pada daerah integral, elemen prima dari suatu ring pasti merupakan unsur tak tereduksi.

Teorema 3.1. (Maulana dkk, 2018) Misalkan D suatu daerah integral, jika p adalah elemen prima maka p adalah unsur tak tereduksi.

Bukti: Misalkan p = ab, jelas p|ab, karena p prima. Akibatnya didapatkan p|a atau p|b, tanpa mengurangi perumuman, misalkan p|a, atau pt = a untuk suatu $t \in D$. Karena $1 \in D$ maka 1a = a = pt = (ab)t = a(bt), dan karean hukum pembatalan berlaku di daerah integral maka bt = 1, atau b suatu unit.∎

Sebaliknya tidak berlaku secara umum, beberapa contoh menarik ada gelanggang $Z[i\sqrt{5}]$ karena $2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$ yang berakibat 2 membagi perkalian $(1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$ tapi tidak membagi salah satu faktornya. Jadi 2 adalah unsur prima yang tak tereduksi.

Pada daerah ideal utama, elemen prima dan elemen tak tereduksi adalah dua hal yang sama.

Teorema 3.2. (Maulana dkk, 2019) Misalkan D adalah daerah ideal utama dengan x suatu unsur tak nol di D. Unsur x adalah elemen prima jika dan hanya jika unsur x adalah elemen tak tereduksi.

Bukti: Dari teorema sebelumnya telah diketahui apabila elemen prima adalah elemen tak tereduksi, sehingga tinggal ditunjukkan sebaliknya. Sekarang misalkan $x \in D$ adalah unsur tak tereduksi, andaikan (x) bukan ideal maksimal, maka terdapat ideal sejati (t) yang memuat (x) dengan $(t) \neq (x)$. Jadi $x \in (t)$ yang berakibat terdapat $s \in D$ sehingga x = st. Element s tidak mungkin unit, karena jika s unit maka (x) = (t). Element t sendiri tidak mungkin unit karena (t) ideal sejati. Hal ini berakibat x element tak tereduksi (kontradiksi). Akibatnya haruslah (x) ideal maksimal. Andaikan x bukan prima maka bisa didapatkan faktor prima dari x, sebut y, dengan x = yz dimana z bukan unit. Akibatnya didapatkan ideal sejati (y) yang memuat ideal (x) dengan $(x) \neq (y)$. Hal ini kontradiksi dengan (x) ideal maksimal, sehingga haruslah x elemen prima. ∎

Tidak selamanya suatu gelanggang memiliki oleh ideal yang dibangun oleh berhingga unsur. Gelanggang yang setiap idealnya dibangun oleh berhingga unsur dinamakan gelanggang Noether.

Definisi 3.9. (Ghoffari dkk, 2023) Sebuah gelanggang komutatif R disebut Noetherian (gelanggang Noether) jika setiap ideal dari R dibangun secara berhingga.

Khususnya, apabila semua ideal dari gelanggang komutatif R dibangun oleh satu unsur dan R merupakan daerah integral, maka gelanggang R dinamakan daerah ideal utama.

Definisi 3.10. (Arifin dkk, 2016) Daerah integral R disebut daerah ideal utama jika setiap idealnya merupakan ideal utama, yakni setiap idealnya dapat dibangun oleh satu elemen.

Teorema 3.3. Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan unsur satuan, tiga kondisi berikut ekivalen.

1. Setiap rantai naik ideal $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ di R akan berhenti (akan terdapat $N \in N$ sehingga $I_n = I_N$ untuk semua $n \geq N$
2. Setiap koleksi tak hampa dari ideal R punya unsur maksimal.
3. Setiap ideal dari R dibangun secara hingga

Bukti: Misalkan X adalah koleksi tak hampa dari ideal R, ambil sebarang ideal $I_1 \in X$. Apabila I_1 maksimal maka selesai. Apabila tidak, maka terdapat $I_2 \in X$ sehingga $I_1 \subset I_2$, apabila I_2 maksimal maka proses selesai, jika tidak maka terdapat $I_3 \in X$ sehingga $I_1 \subset I_2 \subset I_3$. Andai I_3 belum maksimal maka proses dapat dilanjutkan kembali, sehingga didapatkan rantai naik ideal. Karena diketahui rantai naik ideal selalu berhenti, misal pada I_N, maka I_N adalah ideal maksimal.

Misalkan I ideal dari R dan $Y = \{J \triangleleft R | J \subset I$ dan J dibangun secara berhingga$\}$ adalah koleksi semua ideal yang dibangun secara berhingga yang dimuat oleh I. Jelas Y tak hampa karena ideal nol adalah anggotnya, oleh karena itu Y memiliki unsur maksimal, namakan J. Andaikan $J \neq I$ maka terdapat $x \in I - J$, sehingga dapat dibentuk ideal baru $J + (x)$ yang juga merupakan ideal yang dibangun secara hingga yang berakibat $J + (x) \in Y$. Hal ini kontradiksi dengan J adalah unsur maksimal, akibtanya haruslah $J = I$. Jadi I adalah ideal yang dibangun secara hingga.

Misalkan $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ rantai naik ideal dan definisikan $I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Jelas I suatu ideal, dan dari asumsi $I = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ untuk $a_i \in R$. Akibatnya dapat ditemukan $N \in N$ sehingga $a_1, a_2, \ldots, a_m \in I_N$, sehingga $I \in I_N$ yang berakibat $I_n = I_N$

untuk semua $n \geq N$. Jadi rantai naik ideal ini akan berhenti. ∎

David Hilbert menunjukkan bahwa untuk sebarang gelanggang Noether, senantiasa dapat dibangun gelanggang baru yang juga suatu gelanggang Noether.

Teorema 3.4. Jika R adalah gelanggang Noether, maka R[x] juga merupakan gelanggang Noether.

Bukti: Misalkan R adalah gelanggang Noether. Misal I ideal dari R[x], misalkan $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ dengan $a_n \neq 0$, definisikan a_n sebagai koofesian awal dari f(x). Misalkan f_0 adalah polinom dengan derajat paling kecil di I, kemudian pilih f_1 polinom dengan derajat paling kecil dari $I - (f_0)$, dan seterusnya sampai f_{k+1} adalah polinom dengan derajat paling kecil dari $I - (f_0, f_1 \ldots f_k)$. Lakukan ini terus untuk medapatkan barisan (f_k) dari elemen I. Misalkan a_k adalah koefesian awal dari f_k, bangun ideal $J = \left(a_0, a_1, a_2 \ldots\right)$. Karena R Noether, maka $J = \left(a_0, a_1, \ldots a_N\right)$ untuk suatu $N \in \mathbb{N}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $I = (f_0, f_1 \ldots f_N)$. Andaikan tidak maka $f_{N+1} \in I - (f_1, f_2, \ldots, f_N)$, dan $a_{N+1} = r_0 a_0 + \ldots + r_N a_N$ untuk suatu $r_0 \ldots r_N \in R$. Konstruksi polinom $g(x) = r_N f_N x^{c_N} + \ldots + r_0 f_0 x^{c_0}$ dengan memilih $c_k = \deg\left(f_{N+1}\right) - \deg\ (f_k)$, akibatnya $\deg\left(f_{N+1} - g\right) < \deg\ (f_{N+1})$ dan $f_{N+1} - g \in I$ serta $f_{N+1} - g \notin (f_0, f_1, \ldots, f_N)$. Hal ini kontradiksi dengan minimalnya derajat f_{N+1}. Akibatnya $I = (f_0, f_1 \ldots f_N)$, sehingga R[x] adalah gelanggang Noether. ∎

Teorema 3.4 dapat dikembangkan lebih luas menjadi polinom dengan variabel lebih dari satu.

Teorema 3.5. Jika R adalah gelanggang Noether, maka $R[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ juga merupakan gelanggang Noether.

Bukti: Mengikuti bukti dari Teorema 4.∎

4. Kesimpulan dan Saran

Gelanggang polinom satu variabel atau multi variabel dari suatu gelanggang Noether sennatiasa mengikuti karakteristik keberhinggaan dari gelanggangnya.

Daftar Pustaka

Arifin, S., Garminia, H., & Astuti, P. (2016). Dimensi Valuasi Dari Daerah Ideal Utama. In PROSIDING SEMINAR NASIONAL.

Bricalli, D., Favale, F. F., & Pirola, G. P. (2023). A theorem of Gordan and Noether

via Gorenstein rings. Selecta Mathematica, 29(5), 74.
Fatahillah, D. A. (2022). Perbandingan Ideal Prima Pada Gelanggang Polinomial Bilangan Bulat Z [x] Dan Gelanggang Polinomial Bilangan Bulat Modulo Zn [x]. Undergraduated Thesis, Universitas Mataram.
Ferraro, L., Kirkman, E., Moore, W., & Peng, K. (2021). On the Noether bound for noncommutative rings. Proceedings of the American Mathematical Society, 149(7), 2711-2725.
Khaerunissa, Y. (2018). Ideal Prima pada Gelanggang Bulat Noether. Bilangan Prima dan Bilangan tak Tereduksi pada Bilangan bulat Gauss. In Prosiding Seminar Nasional APPPI II (pp. 387-391).
Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2018). Bilangan Prima dan Bilangan tak Tereduksi pada Bilangan bulat Gauss. In Prosiding Seminar Nasional APPPI II (pp. 383-387).
Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2019). Ekivalensi ideal hampir prima dan ideal prima pada bilangan bulat gauss. Eigen Mathematics Journal 2(1), 1-5.
Maulana, M. (2022). Ideal Prima Pada Daerah Dedekind Berupa Polinom Faktor Berderajat Satu Dari Ring Bilangan Bulat. Fraktal: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika, 3(2), 65-69.
Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021, March). Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 1115, No. 1, p. 012084). IOP Publishing.
Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). Teori ring dan modul. UGM PRESS.