



## Bifurkasi Hopf Pada Model Mangsa Pemangsa Dengan Fungsi Respons Rasio Dependent Holling Type II dan Perilaku Anti Pemangsa

Deslin Sarmitha Bardayanti<sup>1</sup>, Marwan<sup>2</sup>, Bulqis Nebula Syechah<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universitas Mataram

<sup>2</sup>Universitas Mataram

<sup>3</sup>Universitas Mataram

Posel: deslinbardayanti@gmail.com

**Abstrak:** Interaksi antara makhluk hidup dengan lingkungannya disebut ekologi dalam hal ini interaksi yang dimaksud adalah interaksi mangsa pemangsa. Pada penelitian ini, untuk memahami interaksi mangsa pemangsa dibutuhkan model matematika. Salah satu kejadian yang muncul pada model matematika yaitu bifurkasi, yang mana model mengalami perubahan stabilitas. Model matematika yang digunakan adalah model interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respons rasio *dependent* Holling type II dan perilaku anti pemangsa. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis terjadinya bifurkasi model tersebut serta bentuk dari potret fase pada model. Pada model dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dengan metode linearisasi menggunakan matriks Jacobian. Simulasi numerik juga dilakukan dengan menganalisis salah satu parameter pada model yaitu parameter  $d$  untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangannya. Selanjutnya, metode *bisection* (metode bagi dua) digunakan untuk mengahampiri titik terjadinya perubahan kestabilan (bifurkasi). Hasil analisis menunjukkan bahwa bifurkasi Hopf dapat terjadi pada saat nilai parameter  $d^* = 0.115781$ , dengan nilai eigennya  $Re\{\lambda_{1,2}\} = 0, Im\{\lambda_{1,2}\} \neq 0$  yang artinya bentuk potret fasenya cenderung membentuk *cycle* pada model dengan seluruh solusi akan konvergen ke suatu solusi periodik/*limit cycle*.

**Kata-kata kunci:** Bifurkasi Hopf, *Limit Cycle*, Mangsa Pemangsa, Metode Biseksi.

**Abstract:** *The interaction between living things and their environment is called ecology, in this case the interaction in question is the interaction between prey and predator. In this research, to understand predator-prey interactions, a mathematical model is needed. One of the events that occurs in mathematical models is bifurcation, where the model experiences a change in stability. The mathematical model used is a prey-predator interaction model with a Holling type II dependent ratio response function and anti-predator behavior. This research aims to analyze the occurrence of bifurcation of the model and the shape of the phase portrait in the model. In the model, an analysis of the stability of the equilibrium point is carried out using the linearization method using the Jacobian matrix. Numerical simulations are also carried out by analyzing one of the parameters in the model, namely parameter  $d$ , to determine the stability of the equilibrium point. Next, the bisection method is used to approach the point where the change in stability (bifurcation) occurs. The analysis results show that Hopf bifurcation can occur when the parameter value  $d^* = 0.115781$ , with an eigenvalue of  $Re\{\lambda_{1,2}\} = 0, Im\{\lambda_{1,2}\} \neq 0$ , which means that the shape of the phase portrait tends to form a cycle in the model with all solutions converging to a periodic/limit cycle solution.*

**Keywords:** Hopf Bifurcation, *Limit Cycle*, Predatory Prey, Bisection Method.



## PENDAHULUAN

Interaksi antara pemangsa dengan mangsanya, yang sering disebut dengan interaksi mangsa-pemangsa, merupakan salah satu interaksi yang berlangsung dalam suatu ekosistem (Pusawidjayanti, Suryanto, dan Wibowo, 2015). Model interaksi mangsa pemangsa adalah suatu model matematika terkait dua spesies yang berinteraksi satu sama lain, dan salah satu spesies harus berburu spesies lain untuk bertahan hidup yang biasa disebut sebagai mangsa-pemangsa (Panigoro, 2014).

Pada tahun 1950, Holling memperkenalkan fungsi respons. Fungsi respons merupakan konsep dalam ekologi yang mengacu pada jumlah makanan yang dikonsumsi oleh pemangsa dalam kaitannya dengan kepadatan mangsa (*prey*) (Hunsicker dkk, 2011 dalam Wijayanti dan Kharis, 2015). Kepadatan populasi pemangsa tidak hanya bergantung pada populasi mangsa, namun juga pada populasi pemangsa itu sendiri pada saat predasi terjadi akibat kepadatan populasi dari pemangsa yang disebut sebagai rasio *dependent* (Arditi dan Ginzburg, 1989). Hal ini dapat diteliti dengan melihat perilaku anti pemangsa dengan kata lain kepadatan populasi pemangsa akan menjadi penyebab persaingan antar pemangsa itu sendiri (Saadah, Abadi, dan Savitri, 2019).

Dalam penelitian Saadah, Abadi, dan Savitri (2019) melakukan rekonstruksi model, dimana peneliti mempertimbangkan bahwa kecenderungan pemangsa yang tidak mencari mangsa lain ketika mangsa utama mengalami kepunahan yang mana hal tersebut merupakan fungsi respons Holling tipe II. Selain itu, peneliti mengaitkan dengan populasi pemangsa yang tidak hanya bergantung pada populasi mangsa saja, namun juga pada populasi pemangsa. Sehingga diperoleh model interaksi mangsa-pemangsa dengan fungsi respons rasio Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa.

Secara umum menurut Lynch (2010), definisi bifurkasi dinyatakan sebagai sebuah medan vektor  $f \in \mathbb{R}^2$  yang terdiferensialkan secara kontinu, disebut stabil secara struktur (*structurally stable*) jika terdapat gangguan kecil pada sistem  $\dot{x} = f(x)$  menyebabkan perilaku berubah secara kualitatif. Perubahan kecil dalam suatu sistem menyebabkan perubahan perilaku, maka  $f$  disebut tidak stabil secara struktur. Gejala bifurkasi ditandai dengan perubahan stabilitas atau perilaku sistem ketika nilai parameternya diubah (Aini dan Savitri, 2021). Adapun salah satu bifurkasi yang terjadi yaitu bifurkasi Hopf yang ditandai dengan munculnya solusi periodik pada sistem.

Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik melakukan penelitian terhadap model interaksi mangsa-pemangsa dengan fungsi respons rasio Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa. Dalam penelitian ini akan dilakukan asumsi



parameter dengan melakukan variasi pada parameter khusus untuk melihat terjadinya perubahan kestabilan pada sistem.

## METODE PENELITIAN

Model interaksi mangsa-pemangsa dengan fungsi respons rasio *dependent* Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa dinyatakan dalam sistem persamaan berikut (Saadah, Abadi, dan Savitri, 2019):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta xy}{y + \gamma x} \\ \dot{y}(t) &= \frac{bxy}{y + \gamma x} - my - \eta xy\end{aligned}\quad (1)$$

Sistem (1) merepresentasikan secara berturut-turut  $x, y$  kepadatan populasi mangsa dan pemangsa, dengan  $\dot{x}(t)$  dan  $\dot{y}(t)$  menyatakan perubahan kepadatan populasi mangsa dan pemangsa. Adapun beberapa parameter pada sistem (1) diantaranya yaitu  $r$  yang menyatakan laju pertumbuhan pada populasi mangsa dengan  $k$  sebagai daya tampung lingkungan,  $\beta$  menyatakan laju pemangsaan pemangsa,  $b$  menyatakan laju konversi biomassa sebagai bentuk perubahan dari energi yang diperoleh akibat memakan mangsa. Adapun parameter  $m$  yang menyatakan laju kematian dari pemangsa,  $\gamma$  menyatakan waktu yang dibutuhkan pemangsa dalam menangani mangsa, dan parameter  $\eta$  yang menyatakan perilaku anti pemangsa.

Selanjutnya model interaksi mangsa pemangsa pada sistem (1) di *scaling* agar mempermudah proses perhitungan dengan bentuk *scaling* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{X}(\tau) &= X(1 - X) - \frac{gXY}{X + Y} \\ \dot{Y}(\tau) &= -dY + \frac{pXY}{X + Y} - eXY\end{aligned}\quad (2)$$

Dengan  $X = \frac{x}{k}, Y = \frac{y}{ky}, \tau = tr, g = \frac{\beta}{r}, p = \frac{b}{r\gamma}, d = \frac{m}{r}, e = \frac{\eta k}{r}$ . Semua parameter pada persamaan (2) diberikan syarat kondisi awal  $> 0$ .

Di dalam penelitian ini, digunakan metode *bisection* yang disebut juga metode bagi dua, karena untuk mencari komponen nilai tengahnya menggunakan suatu rumus yaitu nilai  $x$  ditambahkan dengan nilai  $x$  didepannya kemudian dibagi dua (Sunandar dalam Akmala dkk, 2022). Metode ini digunakan untuk menghampiri titik terjadinya bifurkasi Hopf pada sistem.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan pada sistem (2) diperoleh 3 titik keseimbangan sebagai berikut :



$$\begin{aligned}\dot{Y}(\tau) &= -dY + \frac{pXY}{(X+Y)} - eXY \\ 0 &= \frac{-dY(X+Y) + pXY - eXY(X+Y)}{X+Y} \\ 0 &= \frac{-dXY - dY^2 + pXY - eX^2Y - eXY^2}{X+Y} \\ 0 &= -dXY - dY^2 + pXY - eX^2Y - eXY^2 \\ 0 &= -Y(dX + dY - pX + eX^2 + eXY) \\ 0 &= Y(dX + dY - pX + eX^2 + eXY)\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}Y &= 0 \text{ atau;} \\ Y &= \frac{-dX + pX - eX^2}{d + eX}\end{aligned}$$

Berdasarkan nilai  $Y$  yang diperoleh, substitusi untuk  $Y = 0$  pada  $\dot{X}(\tau)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{X}(\tau) &= X(1-X) - \left(\frac{gXY}{X+Y}\right) \\ 0 &= X(1-X) - \left(\frac{gX(0)}{X+(0)}\right) \\ 0 &= X(1-X) - 0 \\ 0 &= X(1-X)\end{aligned}$$

Diperoleh:  $X = 0$  dan  $X = 1$

Maka titik kesetimbangan diperoleh:

$$\begin{aligned}E_0 &= (X_0, Y_0) = (0,0) \\ E_1 &= (X_1, Y_1) = (1,0)\end{aligned}$$

Berdasarkan nilai  $Y$  yang diperoleh, substitusi untuk  $Y = \frac{-dX+pX-eX^2}{d+eX}$  pada persamaan  $\dot{X}(\tau)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{X}(\tau) &= X(1-X) - \left(\frac{gXY}{X+Y}\right) \\ 0 &= X(1-X) - \left(\frac{gX\left(\frac{-dX+pX-eX^2}{d+eX}\right)}{X+\left(\frac{-dX+pX-eX^2}{d+eX}\right)}\right) \\ 0 &= X(1-X) - \left(\frac{\frac{-gdX^2+gpX^2-geX^3}{d+eX}}{\frac{X(d+eX)-dX+pX-eX^2}{d+eX}}\right) \\ 0 &= X(1-X) - \left(\frac{-gdX^2+gpX^2-geX^3}{d+eX}\right)\left(\frac{d+eX}{dX+eX^2-dX+pX-eX^2}\right) \\ 0 &= X(1-X) - \left(\frac{-gdX^2+gpX^2-geX^3}{pX}\right)\end{aligned}$$



$$0 = \left( \frac{(X - X^2)(pX) + gdX^2 - gpX^2 + geX^3}{pX} \right)$$

$$0 = \left( \frac{(pX^2 - pX^3) + gdX^2 - gpX^2 + geX^3}{pX} \right)$$

$$0 = pX^2 - pX^3 + gdX^2 - gpX^2 + geX^3$$

$$0 = X(pX - pX^2 + gdX - gpX + geX^2)$$

Maka

$$X = 0 \text{ atau;}$$

$$X^* = \frac{(gp - gd - p)}{ge - p}$$

Adapun,

$$Y = \frac{-dX + pX - eX^2}{d + eX}$$

$$Y = \frac{-d \left( \frac{(gp - gd - p)}{ge - p} \right) + p \left( \frac{(gp - gd - p)}{ge - p} \right) - e \left( \frac{(gp - gd - p)}{ge - p} \right)^2}{d + e \left( \frac{(gp - gd - p)}{ge - p} \right)}$$

$$Y = \frac{\frac{(-dgp + gd^2 - dp) + (gp^2 - gdp - p^2)}{ge - p} - e \left( \frac{g^2p^2 + g^2d^2 - 2g^2dp - 2gp^2 + 2dgp}{ge - p} \right)}{\left( \frac{dge - dp + egp - egd - ep}{ge - p} \right)}$$

$$Y = \frac{\frac{(-dgp + gd^2 - dp) + (gp^2 - gdp - p^2) - eg^2p^2 - eg^2d^2 + 2eg^2dp + 2egp^2 - 2edgp}{ge - p}}{\left( \frac{dge - dp + egp - dge - ep}{ge - p} \right)}$$

$$Y = \frac{gep^2 - edgp + 2dgp^2 - d^2gp - dp^2 - gp^3 + p^3 - ep^2}{(ge - p)p(ge - d - e)}$$

$$Y = \frac{p(gep - edg + 2dgp - d^2g - dp - gp^2 + p^2 - ep)}{(ge - p)p(ge - d - e)}$$

$$Y = \frac{gep - edg + 2dgp - d^2g - dp - gp^2 + p^2 - ep}{(ge - p)(ge - d - e)}$$

$$Y = \frac{-(gp - gd - p)(p - d - e)}{(ge - p)(ge - d - e)}$$

Diperoleh

$$Y^* = \frac{-(gp - gd - p)(p - d - e)}{(ge - p)(ge - d - e)}$$

Maka diketahui untuk titik kesetimbangan  $E_2$  yaitu:

$$E_2 = (X^*, Y^*) = \left( \frac{(gp - gd - p)}{ge - p}, \frac{-(gp - gd - p)(p - d - e)}{(ge - p)(ge - d - e)} \right)$$

**Analisis Kestabilan**



Untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan, dapat memanfaatkan sistem yang telah dilinearkan. Pelinearan sistem persamaan tersebut menggunakan Jacobian ( $Jf$ ) yang berordo  $2 \times 2$ , diperoleh Jacobian ( $Jf$ ) sebagai berikut:

$$Jf = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial X} & \frac{\partial f_1(Y)}{\partial X} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial Y} & \frac{\partial f_2(Y)}{\partial Y} \end{bmatrix}$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} 1 - 2X - \frac{gY}{X+Y} + \frac{gXY}{(X+Y)^2} & -\frac{gX}{X+Y} + \frac{gXY}{(X+Y)^2} \\ -eY + \frac{pY}{X+Y} - \frac{pXY}{(X+Y)^2} & -d - eX - \frac{pXY}{(X+Y)^2} + \frac{pX}{X+Y} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dengan matriks Jacobian.

1.  $E_0 = (X_0, Y_0) = (0,0)$

Titik kesetimbangan  $E_0$  diasumsikan saat ketiadaan populasi mangsa-pemangsa.

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan pertama menggunakan matriks Jacobian, diperoleh:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 - 2(0) - \frac{g(0)}{0+0} + \frac{g(0)(0)}{(0+0)^2} & -\frac{g(0)}{0+0} + \frac{g(0)(0)}{(0+0)^2} \\ -e(0) + \frac{p(0)}{0+0} - \frac{p(0)(0)}{(0+0)^2} & -d - e(0) - \frac{p(0)(0)}{(0+0)^2} + \frac{p(0)}{0+0} \end{bmatrix}$$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh nilai eigen digunakan persamaan (3.9) dengan  $J(E_0) = A$  maka

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} - \lambda I \right| &= 0 \\ \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -d-\lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk titik kesetimbangan pertama  $E_0$  adalah  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -d$ . Karena semua parameter diberikan syarat awal  $> 0$ , maka berdasarkan nilai-nilai eigen yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan pertama  $E_0$  menunjukkan ketidakstabilan berupa *saddle* karena ditandai dengan nilai eigen  $\lambda_1 > 0$  dan nilai eigen  $\lambda_2 < 0$ .

2.  $E_1 = (X_1, Y_1) = (1,0)$

Titik kesetimbangan  $E_1$  diasumsikan saat pemangsa mengalami kepunahan.



Dengan cara yang sama, nilai eigen yang diperoleh menggunakan matriks Jacobian adalah  $\lambda_1 = -1$  dan  $\lambda_2 = -d - e + p$ . Nilai eigen  $\lambda_1$  bernilai negative karena  $-1 < 0$ , sedangkan nilai eigen  $\lambda_2$  bernilai negative jika  $p < d + e$  dan bernilai positif jika  $p > d + e$ . Ketika  $\lambda_2$  bernilai negatif mengakibatkan kestabilan bersifat stabil asimtotik dengan jenis stabilitasnya *node*. Demikian pula ketika  $\lambda_2$  bernilai positif, mengakibatkan kestabilan bersifat tidak stabil dengan jenis stabilitasnya *saddle*. Sedangkan jika  $p = d + e$ , maka  $\lambda_2$  bernilai 0 dengan kestabilannya bersifat stabil dan jenis stabilitas *node*.

$$3. E_2 = (X^*, Y^*) = \left( \frac{(gp-gd-p)}{ge-p}, \frac{-(gp-gd-p)(p-d-e)}{(ge-p)(ge-d-e)} \right)$$

Titik kesetimbangan  $E_2$  diasumsikan saat mangsa-pemangsa saling berinteraksi atau hidup berdampingan (terdapat populasi mangsa dan pemangsa sehingga saling berinteraksi).

Dengan cara yang sama, nilai eigen yang diperoleh menggunakan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$JE_2 = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

dengan

$$J_{11} = 1 - 2X^* - \frac{gY^*}{X^* + Y^*} + \frac{gX^*Y^*}{(X^* + Y^*)^2}$$

$$J_{12} = -\frac{gX^*}{X^* + Y^*} + \frac{gX^*Y^*}{(X^* + Y^*)^2}$$

$$J_{21} = \frac{pY^*}{X^* + Y^*} - \frac{pX^*Y^*}{(X^* + Y^*)^2} - eY^*$$

$$J_{22} = -d + \frac{pX^*}{X^* + Y^*} - \frac{pX^*Y^*}{(X^* + Y^*)^2} - eX^*$$

Yang menghasilkan nilai eigen  $\lambda_1 = \frac{(J_{11}+J_{22})+\sqrt{(-J_{11}-J_{22})^2-4(J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21})}}{2}$  dan  $\lambda_2 = \frac{(J_{11}+J_{22})-\sqrt{(-J_{11}-J_{22})^2-4(J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21})}}{2}$

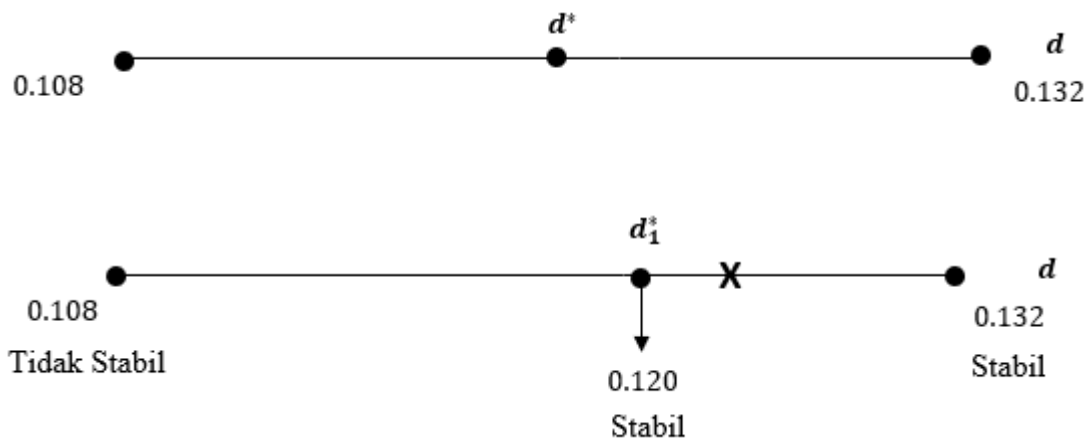
Table 1 Asumsi Nilai Parameter Pada Sistem

Notasi	Keterangan	Nilai	Satuan
$x$	Banyaknya populasi mangsa pada waktu $t$	-	Populasi
$y$	Banyaknya populasi pemangsa pada waktu $t$	-	Populasi
$r$	Pertumbuhan intrinsik populasi mangsa	0.05	$\frac{1}{waktu}$
$m$	Kematian alami pemangsa	0.0054	$\frac{1}{waktu}$
$k$	Daya tampung lingkungan	10	Populasi



$\beta$	Laju pemangsaan pemangsa	0.061	$\frac{1}{\text{waktu}}$
$b$	Laju konversi biomassa	0.0255	$\frac{1}{\text{waktu}}$
$\gamma$	Waktu yang diperlukan oleh pemangsa dalam menangani mangsa	1.5	$\frac{1}{\text{waktu}}$
$\eta$	Perilaku anti pemangsa	0.00002	Populasi

Selanjutnya, dalam penelitian ini digunakan metode biseksi untuk menghampiri titik tempat terjadinya perubahan kestabilan (bifurkasi). Berikut adalah penggunaan metode biseksi untuk menghampiri titik bifurkasi pada parameter  $d = \frac{m}{r}$  yang berada di antara  $d = 0.108$  (tidak stabil) dan  $d = 0.132$  (stabil).

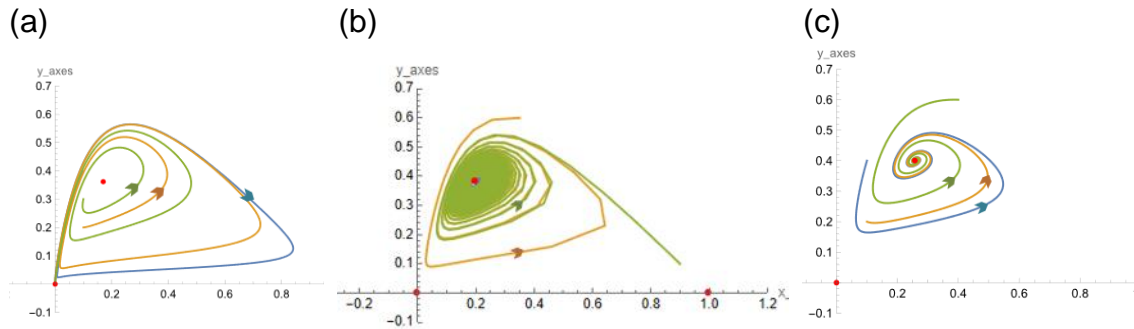


Selanjutnya, dengan mensubstitusikan nilai  $d = 0.120$  diperoleh titik kesetimbangan  $E_2 = (0.213655, 0.38742)$ . Diperoleh nilai eigen dari titik kesetimbangan tersebut yaitu  $\lambda_{1,2} = -0.00602047 \pm 0.127937i$ . Jadi, dengan nilai eigen  $\lambda_{1,2}$  yang merupakan bagian riil bernilai negatif dapat disimpulkan bahwa dengan metode biseksi dapat diperoleh kondisi yang stabil. Namun, dalam penelitian ini akan dihipotesiskan titik tempat terjadinya perubahan kestabilan, dengan cara yang sama cari nilai  $c$  (titik tengah) antara interval yang baru tersebut, maka diperoleh titik hampiran sebesar  $d^* = 0.1157812503536224365234375$ .

### Simulasi Numerik

Pada simulasi numerik, sistem dengan nilai awal variasi parameter yang dilakukan yaitu sebesar  $d = 0.108$  diperoleh bentuk potret fase sebagai berikut:





Gambar 1. Potret fase sistem di (a)  $d = 0.108$ , (b) tepat bifurkasi Hopf  $d^* = 0.115781$ , (c)  $d = 0.132$

Gambar 1(a) menjelaskan bahwa ketika nilai parameter  $d = 0.108$  diperoleh tiga solusi titik kesetimbangan yaitu  $E_0 = (0.0)$  dengan jenis titik kesetimbangan *saddle* dan bersifat tidak stabil, selanjutnya titik kesetimbangan  $E_1(1.0)$  dengan jenis titik kesetimbangan *saddle* dan bersifat tidak stabil. Sedangkan pada titik  $E_2(0.169969, 0.361771)$  jenis titik kesetimbangan berupa *source* dan juga bersifat tidak stabil. Dapat dikatakan bahwa ketiga titik kesetimbangan tidak stabil yang artinya populasi mangsa maupun pemangsa akan punah pada suatu waktu. Gambar 1(c) diatas menjelaskan bahwa ketika nilai parameter  $d = 0.132$  diperoleh tiga solusi titik kesetimbangan yaitu  $E_0 = (0.0)$  dengan jenis titik kesetimbangan *saddle* dan bersifat tidak stabil, selanjutnya titik kesetimbangan  $E_1(1.0)$  dengan jenis titik kesetimbangan *saddle* dan bersifat tidak stabil. Sedangkan pada titik  $E_2(0.257341, 0.400377)$  jenis titik kesetimbangan berupa *spiral* dan bersifat stabil. Kestabilan kedua populasi saat hidup berdampingan di suatu wilayah dapat dikatakan stabil pada kesetimbangan  $E_2$  yang ditunjukkan dengan nilai eigen  $\lambda_{1,2}$  merupakan bagian real negative, yakni  $\lambda_{1,2} = -0.0238728 \pm 0.141317i$  atau dengan kata lain ketika nilai eigen yang diperoleh kurang dari nol ( $\lambda_{1,2} < 0$ ) maka kestabilannya dapat dikatakan stabil asimtotik.

Selanjutnya, diperoleh juga kondisi yang stabil menggunakan metode biseksi (metode bagi dua) untuk mengahampiri tempat terjadinya perubahan kestabilan. Diperoleh titik hampiran  $d^* = 0.1157812503536224365234375$  yang menyebabkan kestabilan di titik  $(0.198297, 0.380053)$  dengan nilai eigen  $\lambda_{1,2} = -0.0000123363 \pm 0.122362i$  berikut adalah potret fase yang ditunjukkan pada Gambar 1(c). Ketika nilai parameter  $d = 0.1157812503536224365234375$  yaitu tepat di titik terjadinya bifurkasi Hopf, terjadinya perubahan kestabilan dari tidak stabil menjadi stabil yang mana titik kesetimbangan cenderung atau mendekati solusi periodic dan juga terbentuk *cycle*.

## PENUTUP

Adapun kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil dan pembahasan adalah Dari model interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respons rasio



*dependent* Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu  $E_0 = (0,0)$ ,  $E_1 = (1,0)$ , dan  $E_2 = \left(\frac{gp-gd-p}{ge-p}, \frac{-(gp-gd-p)(p-d-e)}{(ge-p)(ge-d-e)}\right)$ . Selanjutnya dengan melakukan variasi pada parameter  $d = 0.1157812503536224365234375$  dengan nilai eigen  $\lambda_{1,2} = -0.0000123363 \pm 0.122362i$  atau  $Re\{\lambda_{1,2}\} = 0, Im\{\lambda_{1,2}\} \neq 0$ , dapat dikatakan bahwa terjadi bifurkasi Hopf pada sistem. Dari analisis yang dilakukan juga diperoleh bahwa bentuk potret fase pada bifurkasi Hopf yang cenderung membentuk *cycle* pada sistem. Artinya seluruh solusi akan konvergen ke suatu solusi periodik *limit cycle*.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Aini, Q. dan Savitri, D., (2021), Analisis Dinamik Model Mangsa-pemangsa Holling-Tanner Dengan Adanya Makanan Tambahan Pada Pemangsa, Jurnal Ilmiah Matematika, 9(2), 418-430.
- Arditi, R., & Ginzburg, L. R., (1989), Coupling in Predator-Prey Dynamics: Ratio-Dependence, Journal of Theoretical Biology, 139, 311–326.
- Akmala, Q. S., Ekaswati, N., Syaharuddin, Ibrahim, M., dan Mandailina, V., (2022), Metode Biseksi Menggunakan Gui Matlab: Sebuah Simulasi dan Solusi Persamaan Non-Linier, FORDETAK, 659-664.
- Lynch, S., (2010), Dynamical Sistem With Applications Using Maple Second Edition, New York: Birkhauser Boston.
- Panigoro, H. S. (2014). Analisis Dinamik Sistem Predator-Prey Model Leslie-Gower Dengan Pemanenan Secara Konstan Terhadap Predator, Jurnal Euler, 2(1), 1–12.
- Pusawidjayanti, K., Suryanto, A., & Wibowo, R. B. E. (2015). Dynamics of a predator prey model incorporating prey refuge, predator infection and harvesting, Applied Mathematical Sciences, 9(73–76), 3751– 3760.
- Saadah, S., Abadi, dan Savitri, D., (2019), Model Interaksi Mangsa Pemangsa Dengan Fungsi Respons Rasio Dependent Holling Tipe II Dan Perilaku Anti Pemangsa, Jurnal Ilmiah Matematika, 7(2), 6-9.
- Wijayanti, P., & Kharis, M., (2015), Analisis Model Predator-Prey Dua Spesies Dengan Fungsi Respons Holling Tipe 3, 4(1), 38-46.