**SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LEGENDRE**

**MENGGUNAKAN DERET PANGKAT (*POWER SERIES*)**

**(Suatu Studi Pustaka secara Analitik)**

**Oleh: Marzuki1)**

1)Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataran, Jalan Majapahit No.62 Mataram

KodePos83125

**Abstrak**

Persamaan Diferensial Legendre merupakan salah satu jenis per diferensial khusus, yang memiliki bentuk , dengan *l* adalah suatu tetapan. Persamaan diferensial ini dapat diselesaikan menggunakan deret pangkat (*power series*). Solusi persamaan ini memunculkan suatu fungsi khusus yang dikenal dengan Polinomial Legendre, *.* Polinom ini memiliki sifat-sifat yang membentuk suatu himpunan fungsi-fungsi ortogonal. Setelah diselesaikan, diperoleh beberapa polinom Legendre, antara lain: ;; ; ; , dan seterusnya.Polinom-polinom ini dapat juga dicari dengan Formula Rodrigues: , dengan Namun untuk nilai *l* yang cukup besar, akan lebih menyulitkan jika polinom dicari melalui formula ini. Untuk mengatasi hal itu, polinom Legendre dapat dicari melalui hubungan rekursif :, dengan syarat dua polinom berturutan di bawahnya harus sudah diketahui.

**Kata Kunci: Deret Pangkat,Formula Rodrigues,Hubungan Rekursi, Polinomial Legendre**.

1. **Pendahuluan**

Persamaan diferensial Legendre atau sering juga disebut dengan persamaan Legendre merupakan salah satu jenis fungsi khusus. Fungsi khusus dalam fisika matematika adalah fungsi-fungsi pemecahan istimewa dari persamaan diferensial biasa orde dua homogen (Wospakrik, H.J. 1993). Beberapa contoh sederhana tentang fungsi khusus adalah himpunan fungsi-fungsi trigonometri seperti cos nx, sin nx, ataupun einx, yang muncul dalam pemecahan persamaan diferensial orde dua dengan koefisien tetap.

Dalam permasalahan ini yang akan dikaji adalah persamaan diferensial biasa orde dua homogen dengan koefisian taktetap. Secara khusus yang akan dibahas adalah tentang persamaan diferensial Legendre. Solusi persamaan ini akan memunculkan fungsi khusus yang dikenal dengan Polinom Legendre, *.* Fungsi-fungsi khusus ini memiliki sifat-sifat yang membentuk suatu himpunan fungsi ortogonal.

Dalam beberapa permasalahan fisika seperti misalnya tentang persamaan gelombang mekanika kuantum, polinom legendre ini sering muncul. Atas dasar itulah maka persamaan legendre ini menjadi penting untuk dipahami sebagai alat untuk mendalami permasalahan fisika yang lebih lanjut.

1. **Persamaan Diferensial Legendre**

Persamaan diferensial Legendre memiliki bentuk sebagai berikut (Boas, M.L., 1983):

,.......................................................(1)

Atau dapat dituliskan dalam bentuk:

.....(2)

dengan *l* adalah konstanta.

Persamaan ini memiliki pemecahan polinom dengan*l*merupakan bulat taknegatif. Secara umum, solusinya dalam bentuk deret pangkat seperti berikut ini(Boas, M.L., 1983):

................................(3)

Jika diturunkan terhadap *x*, diperoleh

..........................(4)

Jika persamaan (3) dan (4) disubstitusi ke dalam persamaan (2), diperoleh sebagai berikut:

,

,

Jika pangkat dari variabel *x* disamakan dalam pangkat *n*, maka batas bawah notasi sigma menjadi sama yaitu nol,

.

Oleh karena , maka hal itu berarti bahwa

, atau

, atau

.................(5)

dengan n=0,1,2,3,...

Berdasarkan persamaan (5), untuk nilai n yang genap diperoleh sebagai berikut:

untuk n = 0, ,

untuk n = 2, ,

untuk n = 4, diperoleh

,

dan seterusnya.

Sedangkan bila n bernilai ganjil, diperoleh seperti berikut ini:

untuk n=1,

untuk n = 3,

untuk n = 5, diperoleh

dan seterusnya.

Tampak bahwa semua konstanta *a* yang berindeks genap dapat dinyatakan dalam *a*0 dan yang berindeks ganjil dapat dinyatakan dalam *a*1. Dengan demikian, bila koefisien-koefisien ini disubstitusi ke persamaan (3), diperoleh

(6)

Penyelesaian ini dinamakan dengan fungsi Legendre (Wospakrik, H.J. 1993). Dari persamaan (6) ini tampak bahwa solusi ini terdiri dari dua bentuk deret, yaitu deret pertama yang terkait dengan *a*0 dan deret kedua yang terkait dengan *a*1. Untuk nilai *l* yang genap maka deret pertama yang konvergen dan deret kedua akan divergen, dan sebaliknya untuk nilai *l* yang ganjil.

Kita telah mengetahui bahwa deret yang selalu menarik untuk dibicarakan adalah deret yang konvergen. Kekonvergenan deret dalam fungsi Legendre ini terbatas dalam daerah (Rosdiana M. 2004), dan deret ini sangat bergantung pada nilai *l*. Jika nilai nilai y selalu bernilai satu, sehingga kita dapat menentukan nilai untuk satu nilai *l* tertentu. Akhirnya kita dapat menentukan fungsi y untuk satu nilai *l* tertentu dalam bentuk fungsi pangkat, yang dikenal dengan nama polinom Legendre, .

Berikut ini adalah polinom-polinom Legendre, dimulai dari nilai *l* yang genap:

Jika nilai *l* = 0, berdasarkan persamaan (6), maka.Sedangkanuntukdiperoleh sehingga .Jika . Untukdidapatmaka .

Jika*l* = 4, maka

. Untukdidapatsehingga

,

dan seterusnya.

Lebih lanjut, untuk *l* yang bernilai ganjil, berdasarkan persamaan (6) jika . Untukdiperoleh sehingga.

Jika . Untukmaka sehingga.

Jika*l* = 5,. Untukdiperoleh sehingga,dan seterusnya.

Dengan demikian, diperoleh beberapa fungsi polinom Legendre sebagai berikut:

,; ,

; , dan seterusnya.

1. **Formula Rodrigues**

Formula ini memberikan cara lain untuk menentukan polinom-polinom Legendre. Misalkan ada suatu fungsi , maka turunan pertama terhadap *x*,. Jika dikalikan dengan , maka

.........................(7)

Berdasarkan aturan Leibniz, turunan sebanyak n kali dari perkalian fungsi f(*x*) dan g(*x*) didefinisikan sebagai berikut (Boas, M.L., 1983):

,....................................................(8)

Dengan demikian, turunan sebanyak kali dari ruas kiri dan kanan dari persamaan (7),berdasarkan aturan Leibniz adalah sebagai berikut:

Ruas kiri: =

,

.

Ruas kanan:

Jika kedua ruas dipersamakan, diperoleh:

................................(9)

Bentuk persamaan (9) ini tidak lain adalah persamaan Legendre seperti persamaan (1) dengan Maka adalah solusi dari persamaan Legendre. Seperti kita ketahui bahwa polinom Legendre mengharuskan , sehingga hal ini memberikan faktor pengali sebesar (Boas, M.L., 1983). Dengan demikian diperoleh

................(10)

Persamaan (10) inilah yang dinamakan dengan Formula Rodrigues, dimana formula ini dapat digunakan untuk menentukan polinom-polinom Legendre

1. **Fungsi Pembangkit (*Generating Function*)**

Fungsi pembangkit dari polinomial Legendre dinyatakan dengan (Boas, M.L., 1983):

,.........(11)

dengan

Jika dimisalkan , maka persamaan (11) dapat ditulis menjadi.

Berdasarkan deret binomial newton, (Boas, M.L., 1983) bahwa

. Berpedoman pada deret ini maka ,sehingga diperoleh

,

atau dalam notasi sigma dituliskan .................(12). Dengan demikian, menurut persamaan (11) dan (12), maka

...................................................(13)

**IV.1 Ekspansi Potensial**

Fungsi pembangkit dapat dimanfaatkan untuk mengungkapkan potensial di suatu titik P yang berjarak *d* dari muatan sumber, *q*, dimana potensial listrik berbanding terbalik dengan jarak(Wospakrik, H.J. 1993). Perhatikan gambar berikut:

P

O

*q*

Gambar 1: Potensial di titik P oleh muatan sumber q

Catatan:   
 = posisi muatan q, relatif terhadap O

= posisi titik P, relatif terhadap O

= posisi titik P, relatif terhadap muatan q.

= sudut antara dan .

Potensial listrik oleh sebuah muatan *q* di titik pengamatan P yang berjarak *d* dari *q* adalah:

, .........................................(14)

dengan k adalah suatu tetapan yang nilainya bergantung pada satuan yang dipakai. Jika *R*, *r*, dan *d* berturut-turut adalah besar atau nilai dari vektor , maka berdasarkan gambar di atas, menurut aturan cosinus, .

Atau .

Dari persamaan (14) maka potensial pada titik pengamatan P adalah:

,

, .............(15) dengan dan

Untuk , maka *h*< 1, sehingga sebagaimana persamaan (13) bahwa

.

Dengan demikian persamaan (15) menjadi , atau . ...........(16)

Jika terdapat *n* buah muatan*q*( yang berjarak dan sudut , maka potensial pada titik P oleh masing-masing muatan adalah , sehingga potensial total di titik P oleh *n* buah muatan adalah:

.(17)

Apabila muatan sumber terdistribusi secara kontinu dalam suatu area A, maka penjumlahan terhadap *i* menjadi integral:

....(18) Jika rapat muatan, merupakan muatan per volume, maka elemen muatan dengan adalah elemen volume dalam area A. Dengan demikian potensial total di titik P yang berada di luar area A adalah

, atau dapat ditulis sebagai

.............................(19) dengan

merupakan multipol listrik ke-*l*.

Jika *l* = 0, maka tidak lain adalah muatan total dalam area A. Jika *l* = 1, sehingga merupakan momen dipol listrik sumber. Kemudian, jika *l* = 2, , sehingga

merupakan kuadrupol listrik sumber, dan seterusnya(Boas, M.L., 1983).

**IV.2Persamaan diferensial Legendre dalam ungkapan polinom Legendre**

Dapat dibuktikan bahwa fungsi pembangkit memenuhi hubungan

.........................................................(20)

Jika persamaan (12) disubstitusi ke dalam persamaan (20), akan diperoleh seperti berikut ini:

Oleh karena batas notasi sigma pada setiap suku sudah sama dan semua mengandung , maka dapat kita tuliskan seperti berikut:

. Karena maka hal ini berarti

...........................(21)

Persamaan (21) inilah yang merupakan ungkapan persamaan diferensial Legendre dalam polinom Legendre.

**IV.3 Hubungan Rekursi**

Fungsi pembangkit juga dapat digunakan untuk menurunkan hubungan rekursi (*recursionrelations*) dari polinomial Legendre. Hubungan rekursi merupakan identitas yang digunakan dalam pembuktian ataupun penurunan yang terkait dengan polinom Legendre.

Dengan sedikit manipulasi matematis terhadap fungsi pembangkit, kita dapat membuat beberapa hubungan rekursi yang berbeda. Berikut ini adalah contoh hubungan rekursi(Boas, M.L., 1983), yaitu:

...............................................(22)

1. **Ortogonalitas dan Normalisasi Polinomial Legendre**

Pada persamaan (21) telah dituliskan persamaan diferensial Legendre dalam ungkapan polinomnya yaitu:

= 0

Atau dapat dituliskan seperti berikut:

+.

....................................................(23)

Jika *l* diganti dengan *m*, diperoleh:

+

= 0. ..............................................(24)

Jika persamaan (23) dikalikan dengan dan persamaan (24) dengan kemudian dikurangkan, diperoleh

+

= 0

....................................................(25)

Suku pertama dan kedua persamaan (25) dapat direduksi menjadi

, dan jika diintegralkan dengan batas (-1,1) hasilnya sama dengan nol. Sedangkan suku kedua jika diintegralkan dalam batas yang sama hasilnya juga harus sama dengan nol.

...................(26)

Berdasarkan persamaan (26) ini dapat disimpulkan bahwa untuk , kecuali jika . Ungkapan ini menunjukkan bahwa polinomial-polinomial Legendre saling ortogonal.

Kemudian, untuk melakukan normalisasi terhadap polinomial Legendre, dapat digunakan hubungan rekursif (22.b),

= . Jika kedua ruas dikalikan dengan kemudian diintegralkan, dihasilkan:

...................(27)

Untuk suku kedua ruas kanan, jika *l* genap maka merupakan fungsi genap dan juga fungsi genap sehingga hasil perkaliannya juga fungsi genap. Sedangkan jika *l* ganjil maka merupakan fungsi ganjil dan juga fungsi ganjil, tetapi hasil perkaliannya merupakan fungsi genap. Jadi untuk semuanilai *l* bulat taknegatif, hasilkali merupakan fungsi genap yang hasil integrasinya adalah fungsi ganjil dan bernilai nol jika batas bawah dan atas integral sama besar tapi berlawanan tanda. Dengan demikian, suku kedua ruas kanan persamaan (27) bernilai nol, sehingga menjadi:

. Kalikan kedua ruas dengan 2, didapat

. Suku kedua ruas kanan dipindahkan ke ruas kiri, diperoleh sebagai berikut:

. Nilai , sehingga .

Jadi, , ......(28)sehingga bentuk polinom Legendre yang sudah dinormalisasi (ortonormal) adalah ......................(29)

1. **Simpulan dan Saran**

**VI.1 Simpulan**

Persamaan Diferensial Legendre dapat diselesaikan menggunakan deret pangkat (*power series*). Solusi persamaan ini merupakan fungsi khusus yang dikenal dengan Polinomial Legendre, *.* Setelah diselesaikan, diperoleh beberapa polinom Legendre, antara lain: ; ; ;; , dan seterusnya. Polinom-polinom ini saling ortogonal pada (-1,1). Polinomial Legendre dapat juga dicari dengan Formula Rodrigues: , dengan

Polinomial Legendre memiliki fungsi pembangkit (*Generating Function*), yang dapat digunakan untuk semisal mengungkapkan potensial listrik pada suatu titik oleh muatan sumber yang berada pada jarak tertentu. Melalui fungsi ini juga dapat diperoleh ungkapan Persamaan Diferensial Legendre dalam bentuk polinomialnya, dan juga dimanfaatkan untuk menurunkan hubungan-hubungan rekursi yang bermanfaat untuk menentukan polinomial Legendre untuk nilai *l* yang besar, ataupun untuk menyelidiki sifat-sifat polinomial Legendre lainnya, seperti sifat ortonormal.

**VI.2 Saran**

Solusi Persamaan Diferensial Legendre ini masih terbatas pada polinomial Legendre orde ke-nol. Perlu kiranya untuk dikaji polinomial Legendre dengan orde yang lebih tinggi (*associated Legendre Functions*) serta aplikasinya dalam berbagai permasalahan fisika lanjut.

**DAFTAR PUSTAKA**

1. Arfken, G. (1970). *Mathematical Methods for Fhysicist.* London: Academic Press, Inc.
2. Boas, M.L. (1983) *Mathematical Methods in the Fhysycal Science*. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
3. Rosdiana, dkk. (2004). *Matematika Fisika I,II.* Common Textbook (Edisi Revisi). Jurusan Pendidikan Fisika, FPMIPA UPI.
4. Wospakrik, H.J. (1993). *Dasar-dasar Matematika untuk Fisika II.* Jurusan Fisika ITB.